Prueba experimental. Oscilación de una varilla

OBJETIVO

Determinar el módulo de Young y la densidad de una varilla de aluminio.

MATERIAL

DATOS

Masa de los dos imanes: $m = (5{,}53 \pm 0{,}02)$ g

Anchura de la varilla: $b = (10{,}00 \pm 0{,}05)$ mm

Grosor de la varilla: $a = (1{,}90 \pm 0{,}05)$ mm

FUNDAMENTO TEÓRICO

En esta prueba experimental se va a estudiar la oscilación de una varilla de aluminio de sección rectangular, sujeta por un extremo y libre por el otro (figura 1). Llamaremos M y L a la masa y la longitud de la porción libre de varilla. Además, sobre la varilla se fija una masa m (dos pequeños imanes) a una distancia d del extremo fijo. Se demuestra que el periodo de pequeñas oscilaciones de este sistema en un plano vertical viene dado por

$$T = 4\pi \sqrt{\frac{L^3}{Yba^3}\left(m\frac{d^3}{L^3} + 0{,}243M\right)} \qquad (1)$$

donde Y es el llamado *módulo de Young* del material, que caracteriza su elasticidad frente a esfuerzos de tracción o compresión, b es la anchura de la varilla y a su grosor.

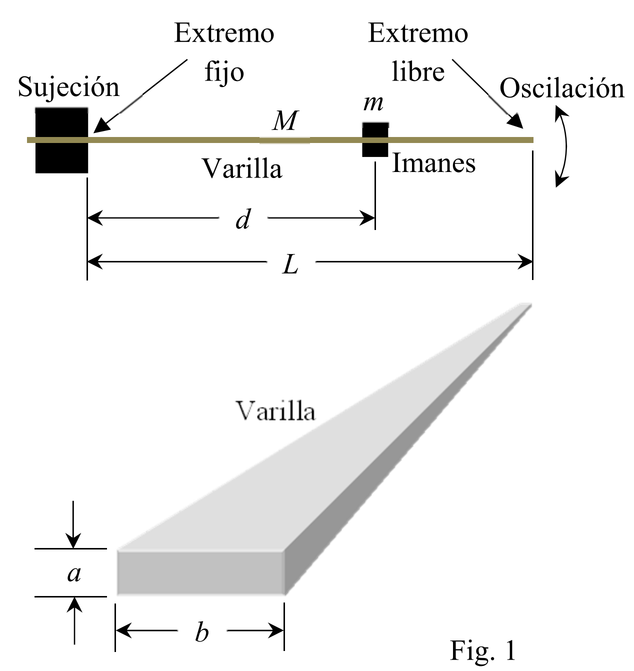


Fig. 1

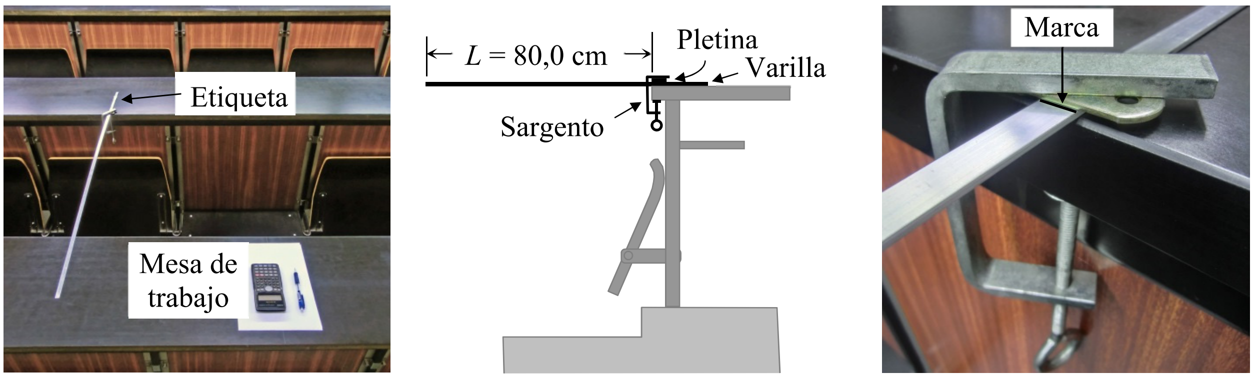
Por otra parte, la *densidad* del aluminio, ρ, está relacionada con la masa y dimensiones de la varilla en la forma

$$\rho = \frac{M}{Lab} \qquad (2)$$

MONTAJE DEL SISTEMA

Trace en la varilla una línea transversal con bolígrafo o lápiz a 80,0 cm del extremo que no tiene etiqueta.

Con el sargento, aprisione la varilla entre la pletina y el borde de la mesa que está detrás de usted, a la derecha de su espalda (figura 2.a), dejando la longitud libre de varilla L = 80,0 cm que previamente ha marcado (figura 2.b). Para que L está unívocamente definida, el borde de la pletina, la marca en la varilla y el borde de la mesa deben ser paralelos y quedar en el mismo plano vertical (figura 2.c). Además, la varilla debe quedar perpendicular a los bordes de la mesa y de la pletina. Una vez conseguida esta posición, sujete con firmeza el sistema apretando el sargento.



a b c

Fig. 2

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

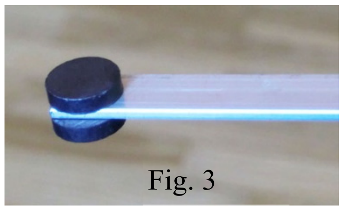


Fig. 3

1) Sitúe los dos imanes uno a cada lado del extremo libre de la varilla (figura 3). Mida con el metro la distancia desde el borde de la pletina hasta el centro de los imanes, d. Haga oscilar verticalmente el sistema, con pequeña amplitud. Empleando el cronómetro, determine el periodo de oscilación, T. Describa detalladamente el procedimiento empleado.

2) Con el mismo procedimiento, determine T para diferentes posiciones de los imanes, hasta $d \approx 40$ cm. Recoja sus resultados en una tabla, dejando espacio para otras columnas, que necesitará más adelante.

3) Combine las expresiones (1) y (2) y obtenga una dependencia lineal entre T^2 y d^3. Indique las expresiones de la pendiente, p, y de la ordenada en el origen, c, de esta recta. Calcule los valores de T^2 y d^3 para sus datos experimentales y añádalos a la tabla del apartado anterior.

4) Represente gráficamente en el papel milimetrado los puntos correspondientes a esta dependencia lineal, con d^3 en abscisas.

5) Determine la pendiente, p, y la ordenada en el origen, c, de la recta que mejor se ajusta a esos puntos.

6) A partir del ajuste anterior, deduzca el módulo de Young, Y, y la densidad, ρ, del aluminio.

7) Haga una estimación de las incertidumbres de la pendiente, Δp, y de la ordenada en el origen, Δc.

8) Teniendo en cuenta únicamente Δp y Δc como fuentes de incertidumbre, haga una estimación de las incertidumbres ΔY y $\Delta \rho$.

9) ¿Cuál cree que es la principal fuente de incertidumbre en la obtención de Y con este procedimiento experimental? Teniendo en cuenta únicamente esta fuente, haga una estimación de ΔY.

Solución

1) Con los imanes situados en la posición de la figura 3, la distancia es d = 79,2 cm. El periodo de oscilación es pequeño, del orden de 0,5 s. Por tanto, para determinar el periodo con buena precisión relativa es necesario cronometrar el tiempo de un número elevado de oscilaciones. Para obtener los resultados que se presentan a continuación se han medido cuatro series de 30 oscilaciones, y se ha tomado el promedio. Como es relativamente fácil equivocarse al contar el número de oscilaciones, se han descartado y repetido las medidas discordantes.

2) Tabla de medidas:

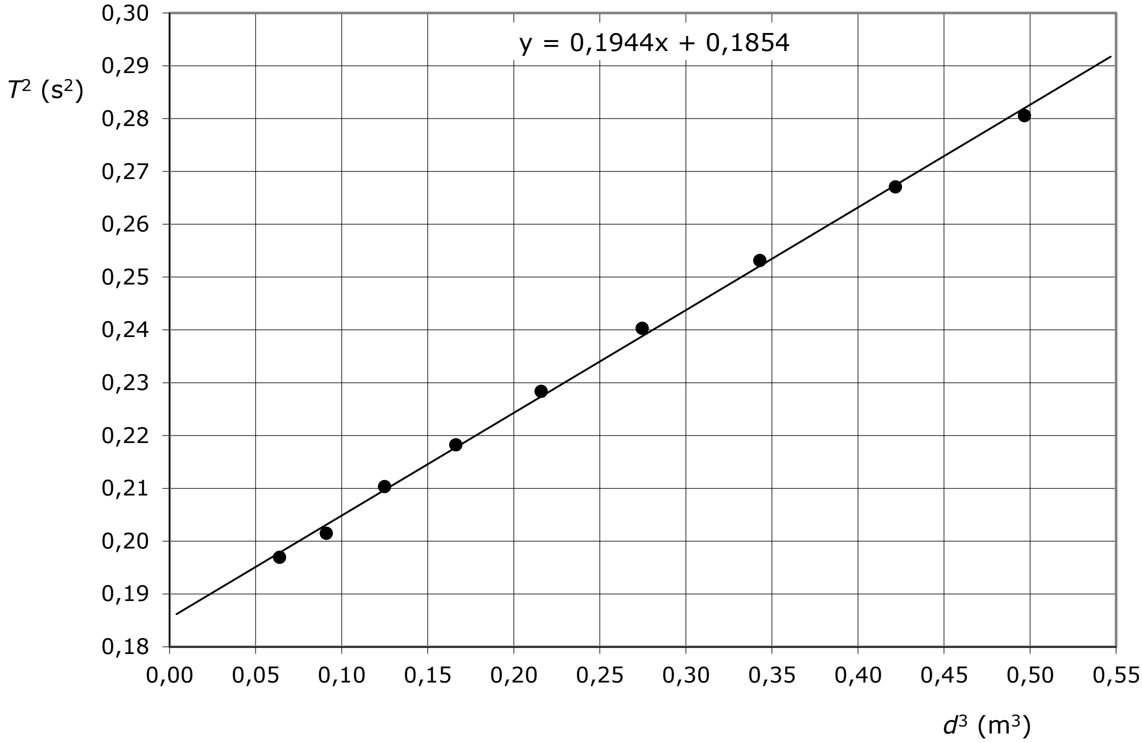
d (m)	30T (s)	T (s)	d^3 (m^3)	T^2 (s^2)
0,792	15,890	0,530	0,497	0,281
0,750	15,503	0,517	0,422	0,267
0,700	15,093	0,503	0,343	0,253
0,650	14,705	0,490	0,275	0,240
0,600	14,335	0,478	0,216	0,228
0,550	14,014	0,467	0,166	0,218
0,500	13,758	0,459	0,125	0,210
0,450	13,465	0,449	0,091	0,201
0,400	13,312	0,444	0,064	0,197

3) Combinando (1) y (2) se obtiene inmediatamente $T^2 = p\,d^3 + c$, con

$$p = 157{,}9\frac{m}{Ya^3b} \tag{3}$$

$$c = 38{,}37\frac{L^4}{Ya^2}\rho \tag{4}$$

4,5) Gráfica y ajuste



La pendiente y la ordenada en el origen de la recta pueden determinarse a partir de las coordenadas de dos puntos alejados sobre la recta o por el método analítico de "mínimos cuadrados". Se obtiene

$$p = 0{,}1944\ \mathrm{s^2/m^3}$$

$$c = 0{,}1854\ \mathrm{s^2}$$

6) Despejando las incógnitas en (3) y (4) se tiene

$$Y = 157{,}9 \frac{m}{a^3 b} \frac{1}{p} = 65{,}5\ \mathrm{GPa} \qquad (5)$$

$$\rho = 4{,}115 \frac{m}{abL^4} \frac{c}{p} = 2{,}79 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \qquad (6)$$

Estos valores son próximos a los que pueden encontrarse en la literatura para el aluminio puro.

7) Para determinar los valores extremos admisibles de p y c es conveniente hacer primero una estimación de la incertidumbre de cada punto experimental (barra de error).

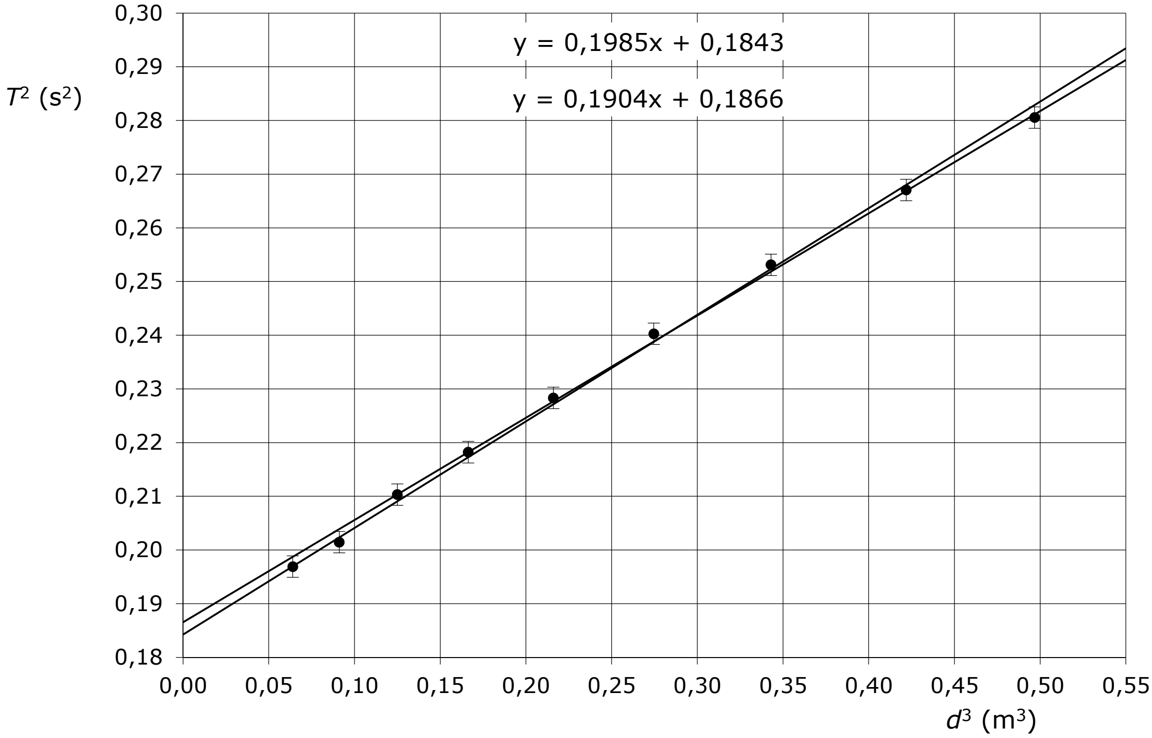
Dado que la oscilación es bastante rápida y que el cronometraje es manual, es razonable considerar una incertidumbre de 0,1 s en cada serie de 30 oscilaciones, es decir $\Delta(30T) = 0{,}1\ \mathrm{s}$. Como se han promediado cuatro series, la incertidumbre de la media se reduce en un factor $\sqrt{4} = 2$, de forma que podemos considerar que la incertidumbre de T es

$$\Delta T = \frac{1}{2} \frac{\Delta(30T)}{30} = 0{,}002\ \mathrm{s}$$

Pero la variable representada en ordenadas es T^2, con incertidumbre

$$\Delta\left(T^2\right) = 2T\,\Delta T \approx 0{,}002\ \mathrm{s^2}$$

La desviación mostrada por los puntos experimentales respecto a la mejor recta es del orden de la prevista con la estimación anterior. Teniendo en cuenta además que la recta debe pasar por el "centro" de la gráfica, $(\bar{x}, \bar{y})$, a continuación se presenta una estimación gráfica de las rectas con pendientes máxima y mínima que se ajustan razonablemente a los puntos experimentales.



Los valores máximo y mínimo de la pendiente y de la ordenada en el origen se muestran en la propia gráfica. Las incertidumbres de p y c resultan

$$\Delta p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} = 0{,}0041 \text{ s}^2\text{m}^{-3} \qquad \frac{\Delta p}{p} = 0{,}021$$

$$\Delta c = \frac{c_{\max} - c_{\min}}{2} = 0{,}0012 \text{ s}^2 \qquad \frac{\Delta c}{c} = 0{,}0065$$

Nota: Puede comprobarse que estos valores son superiores al error típico, y corresponden a un nivel de confianza del orden del 80 %.

8) Tomando incrementos en (5) es fácil demostrar que el error relativo de Y coincide con el error relativo de p, es decir

$$\frac{\Delta Y_p}{Y} = \frac{\Delta p}{p} = 0{,}021 \qquad \Delta Y_p = 1{,}4 \text{ GPa}$$

Por otra parte, en (6) se observa que la densidad ρ depende tanto de la pendiente p como de la ordenada en el origen c, a través del cociente c/p. Podría pensarse que es necesario propagar cada una de las dos incertidumbres, Δp y Δc, para obtener $\Delta\rho_p$ y $\Delta\rho_c$ y calcular la incertidumbre total como

$$\Delta\rho_{c,p} = \sqrt{\Delta\rho_p^2 + \Delta\rho_c^2}$$

Pero este procedimiento corresponde a variables independientes, condición que no se cumple en nuestro caso. Como es fácil comprender observando la gráfica anterior, la pendiente máxima $p_{\max}$ se corresponde con la ordenada en el origen mínima $c_{\min}$, y viceversa, de forma que

$$\left(\frac{c}{p}\right)_{\max} = \frac{c_{\max}}{p_{\min}} \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{c}{p}\right)_{\min} = \frac{c_{\min}}{p_{\max}}$$

Operando, se obtiene

$$\Delta\left(\frac{c}{p}\right) = 0{,}026 \text{ m}^3$$

Según (6), la densidad es proporcional a c/p, de forma que, de nuevo, se transmite el error relativo

$$\frac{\Delta\rho_{c,p}}{\rho} = \frac{\Delta(c/p)}{c/p} = 0{,}027 \qquad \Delta\rho_{c,p} = 0{,}08 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$

En resumen, teniendo en cuenta únicamente Δp y Δc como fuentes de incertidumbre, se obtienen incertidumbres relativas del 2,1 % y 2,7 % para Y y ρ, respectivamente.

9) Además de la pendiente de la recta ajustada, en la expresión (5) de Y aparecen la masa de los imanes, m, y las dimensiones de la varilla, a, b y L.

Las incertidumbres de las tres primeras aparecen en los datos del enunciado, y la incertidumbre de L, que se mide con un metro de papel, puede estimarse en ΔL = 1 mm.

Para comparar, interesa calcular todas las incertidumbres relativas:

$$\frac{\Delta p}{p} = 0{,}021 \qquad \frac{\Delta m}{m} = 0{,}0036 \qquad \frac{\Delta a}{a} = 0{,}026 \qquad \frac{\Delta b}{b} = 0{,}0050 \qquad \frac{\Delta L}{L} \approx 0{,}002$$

Destaca la incertidumbre de a (2,6 %), próxima a la de p (2,1 %). El resto son apreciablemente menores, inferiores al 1 %.

En la expresión (5) se observa que

$$Y \propto \frac{1}{a^3 p}$$

Tomando incrementos (o mediante cálculos numéricos) no es difícil demostrar que, en este caso,

$$\frac{\Delta Y_a}{Y} = 3\frac{\Delta a}{a} = 0,078 \qquad \Delta Y_a = 5 \text{ GPa}$$

$$\frac{\Delta Y_p}{Y} = \frac{\Delta p}{p} = 0,021 \qquad \Delta Y_p = 1,4 \text{ GPa}$$

Por tanto, la fuente dominante de incertidumbre en la obtención de Y con este experimento es el grosor de la varilla, que se transmite al resultado final con un margen del ±8 %.

Considerando simultáneamente todas las fuentes de incertidumbre, este resultado no varía si se expresa con una única cifra significativa.

$$Y = (66 \pm 5) \text{ GPa}$$

Para mejorar la calidad del valor de Y sería prioritario conocer el grosor de la varilla con mayor precisión, midiendo, por ejemplo, con un tornillo micrométrico (pálmer).

Aunque no se pide en el enunciado del problema, para calcular la incertidumbre total de ρ bastaría tener en cuenta las dos principales fuentes de error, que tienen una contribución similar.

$$\Delta\rho = \sqrt{\Delta\rho_{c,p}^2 + \Delta\rho_a^2}$$

Se obtiene

$$\rho = (2,79 \pm 0,11) \times 10^3 \text{ kg/m}^3$$