

**Contenido**

---

|       |  |           |
|-------|--|-----------|
| 1     | Ángulos .....  | 1         |
| 1.1   | <b>Ejercicios elementales y teoría matemática .....</b>                        | <b>1</b>  |
| 1.1.1 | Ángulos complementarios .....  | 1         |
| 1.1.2 | Ángulos suplementarios .....   | 2         |
| 1.1.3 | Rectas que se cortan .....   | 3         |
| 1.1.4 | Rectas paralelas y secantes .....  | 5         |
| 1.1.5 | Ángulos girados.....   | 7         |
| 1.1.6 | Ángulo exterior .....  | 8         |
| 1.2   | <b>Ejercicios –mecánica (identificar ángulos en problemas): .....</b>          | <b>9</b>  |
| 1.2.1 | Ejercicio de plano inclinado .....   | 10        |
| 1.2.2 | Ejercicio de peralte.....  | 11        |
| 1.2.3 | Ejercicio de péndulo.....  | 12        |
| 1.2.4 | Ejercicio equilibrio .....   | 13        |
| 2     | Triángulos rectángulos .....   | 15        |
| 2.1   | <b>Ejercicios elementales y teoría matemática .....</b>                        | <b>15</b> |
| 2.1.1 | Teorema de Pitágoras .....   | 15        |
| 2.1.2 | Relación seno, coseno y tangente.....  | 17        |
| 2.1.3 | Relaciones seno y coseno de ángulos complementarios .....                      | 18        |
| 2.1.4 | Proyecciones.....  | 20        |
| 2.2   | <b>Ejercicios básicos (relacionados con descomposición de vectores): .....</b> | <b>22</b> |
| 2.2.1 | Ángulos en %.....  | 22        |
| 2.2.2 | Descomposición velocidad.....  | 23        |
| 2.2.3 | Altura en un péndulo .....   | 24        |
| 2.2.4 | Plano inclinado .....  | 24        |
| 2.2.5 | Ejercicio de peralte.....  | 25        |
| 2.2.6 | Componentes normal y tangencial del peso en un péndulo .....                   | 26        |

## 1 Ángulos

### Objetivo:

Identificar y conocer relaciones sencillas entre ángulos

### Relaciones:

Este módulo se relaciona con

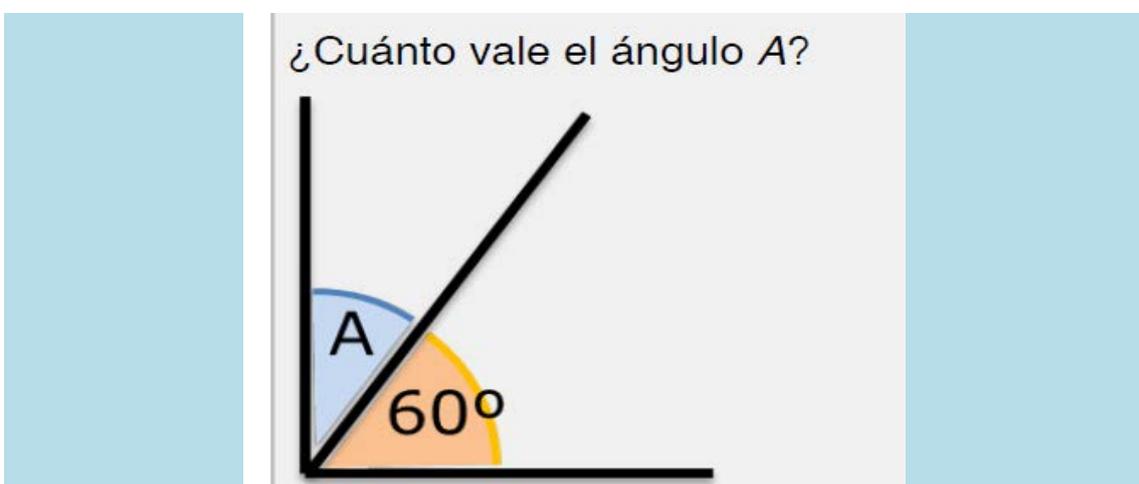
- ⇒ descomposición de vectores
- ⇒ mecánica
- ⇒ electromagnetismo

### 1.1 Ejercicios elementales y teoría matemática

Intente contestar a las siguientes cuestiones sobre ángulos. La respuesta y la teoría matemática subyacente a cada una de las preguntas se muestran al final del apartado.

#### 1.1.1 Ángulos complementarios

#### PREGUNTA:



#### SUGERENCIAS:

- a. ¿Qué ángulo forma su suma?

#### RESPUESTA:

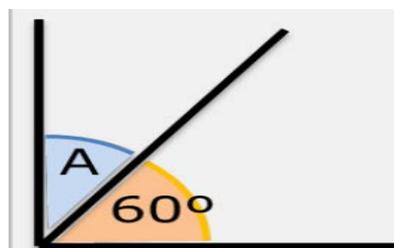
$A$  y  $60^\circ$  son dos ángulos complementarios, es decir su suma forma  $90^\circ$ :

$$90^\circ = 60^\circ + A;$$

Teniendo esto en cuenta:

$$A = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ;$$

$$A = 30^\circ$$



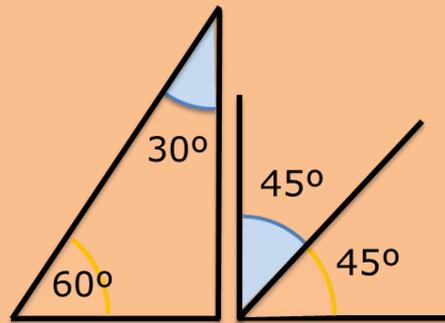
#### DEFINICIÓN:

#### ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS:

Los ángulos complementarios son aquellos ángulos cuya suma es  $90^\circ$ . Los ángulos en los que se divide un ángulo recto siempre son complementarios.

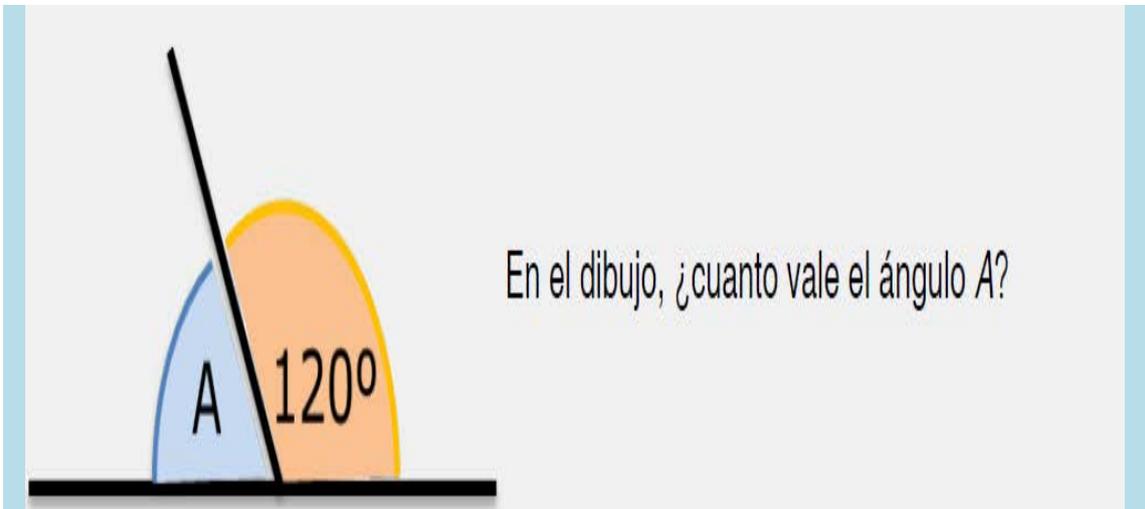
### EJEMPLOS:

Los siguientes ángulos son complementarios (su suma es  $90^\circ$ ):



#### 1.1.2 Ángulos suplementarios

### PREGUNTA:



### SUGERENCIAS:

- Observa el ángulo que forma la suma de  $120^\circ$  y  $A$ .

### RESPUESTA:

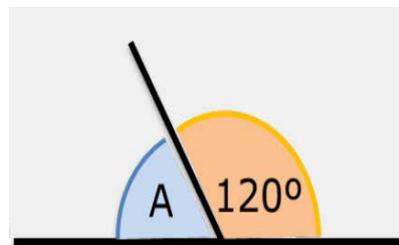
$A$  y  $120^\circ$  son dos ángulos suplementarios, es decir su suma forma  $180^\circ$  (ángulo llano):

$$180^\circ = 120^\circ - A$$

Teniendo esto en cuenta:

$$A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$A = 60^\circ$$



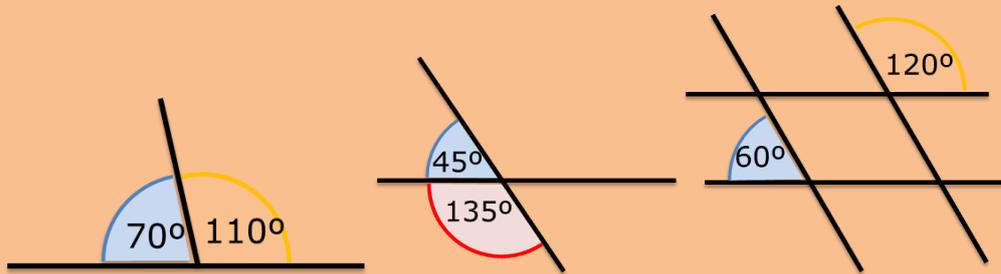
### GLOSARIO

#### ÁNGULOS SUPLEMENTARIOS:

Los ángulos suplementarios son aquellos ángulos cuya suma es  $180^\circ$ . Los ángulos que en su suma forman una línea recta son siempre suplementarios.

### EJEMPLOS:

Los siguientes ángulos son suplementarios (su suma es  $180^\circ$ ):



#### 1.1.3 Rectas que se cortan

### PREGUNTA:

Los ángulos  $D$  y  $A$  suman , por tanto, si  $A$  vale  $60^\circ$   $D$  tiene un valor de °.

$A$  y  $B$  suman ° por tanto  $B$  vale °.

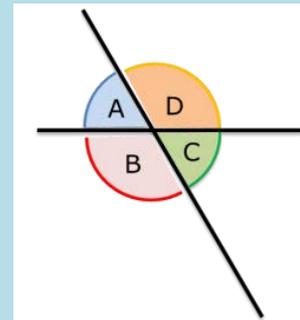
$B$  y  $C$  suman ° por tanto  $C$  vale °.

Por tanto, cuando dos rectas se cortan, los dos ángulos opuestos

tienen  valor. Es decir,

$A$    $C$  y

$B$    $D$ .



### SUGERENCIAS:

Busca ángulos suplementarios, es decir, cuya suma forme  $180^\circ$  (geométricamente la suma forma una línea recta).

### RESPUESTA:

Los ángulos  $D$  y  $A$  son suplementarios, suman  $180^\circ$ , por tanto, si  $A = 60^\circ$ ,

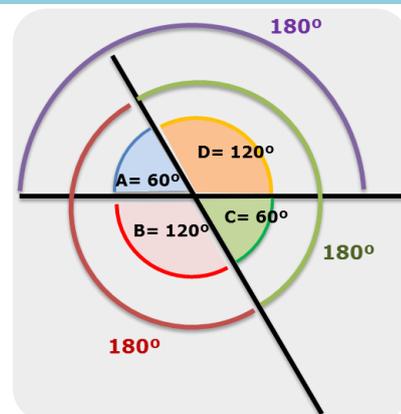
$$D = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Los ángulos  $A$  y  $B$  son suplementarios, suman  $180^\circ$ , por tanto, si  $A = 60^\circ$ ,

$$B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Los ángulos  $B$  y  $C$  son suplementarios, suman  $180^\circ$ , por tanto, si  $B = 120^\circ$ ,

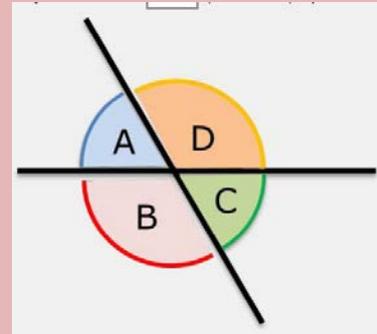
$$C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



## DOS RECTAS QUE SE CORTAN:

Cuando dos rectas se cortan forma cuatro ángulos de manera que:

- **La suma de los 4 ángulos es  $360^\circ$  :**
  - $A+B+C+D=360^\circ$
- **La suma de dos ángulos adyacentes es de  $180^\circ$**   
 (son suplementarios)
  - $A+B=180^\circ$
  - $B+C=180^\circ$
  - $C+D=180^\circ$
  - $D+A=180^\circ$
- **Los ángulos opuestos por el vértice tienen el mismo valor:**
  - $A=C$
  - $B=D$



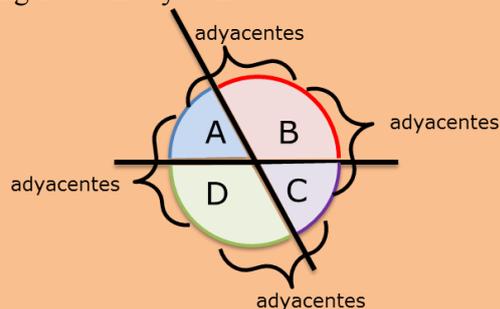
## GLOSARIO

### ÁNGULOS ADYACENTES

Son los que están formados de manera que un lado es común y los otros lados pertenecen a la misma recta. Los ángulos adyacentes son suplementarios.

### EJEMPLO:

Los siguientes ángulos son adyacentes:



| Ángulos adyacentes |   |
|--------------------|---|
| A                  | B |
| B                  | C |
| C                  | D |
| D                  | A |

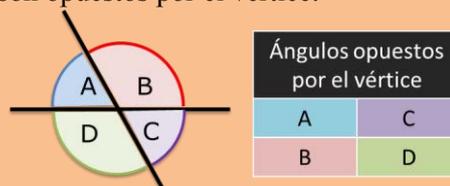
### ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

Dos ángulos son opuestos por el vértice si se encuentran uno enfrente de otro al cruzarse dos rectas en un punto llamado vértice.

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (tienen la misma medida)

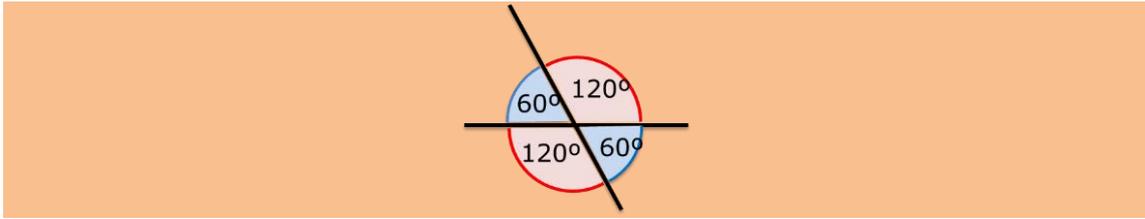
### EJEMPLO:

Los siguientes ángulos son opuestos por el vértice:



| Ángulos opuestos por el vértice |   |
|---------------------------------|---|
| A                               | C |
| B                               | D |

Los ángulos opuestos por el vértice tienen el mismo valor:

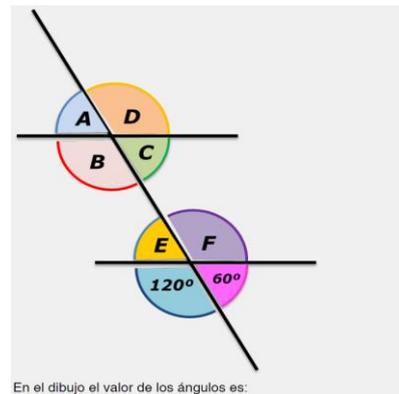


1.1.4 Rectas paralelas y secantes

**PREGUNTA:**

En el dibujo el valor de los ángulos es:

- A =  °
- B =  °
- C =  °
- D =  °
- E =  °
- F =  °



En el dibujo el valor de los ángulos es:

**SUGERENCIAS:**

- i. Buscar ángulos suplementarios (que sumen  $180^\circ$ )
- ii. ¿Cómo son los ángulos opuestos por el vértice?
- iii. ¿Tienen relación los ángulos que forma la secante (recta que corta a las dos paralelas) cuando corta a las dos paralelas?

**RESPUESTA:**

Los ángulos  $120^\circ$  y  $F$  son **opuestos por el vértice**, por tanto, son congruentes (iguales en valor):

$$F = 120^\circ$$

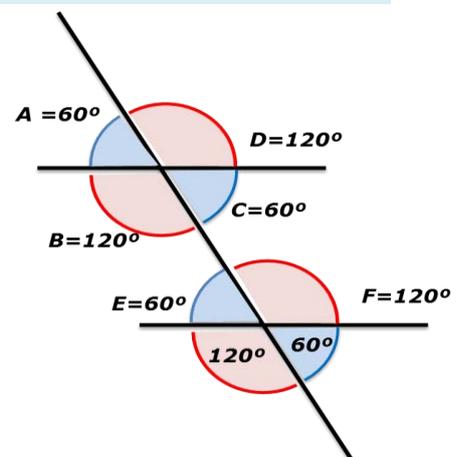
Los ángulos  $60^\circ$  y  $E$  son **opuestos por el vértice**, por tanto, son congruentes (iguales en valor):

$$E = 60^\circ$$

*\*Se puede llegar a la misma solución viendo que tanto  $E$  y  $120^\circ$  como  $F$  y  $60^\circ$  son pares de ángulos suplementarios.*

Los 4 ángulos que forman la secante y cualquiera de las paralelas son iguales:

$$\begin{aligned} A &= E = 60^\circ \\ D &= F = 120^\circ \\ B &= 120^\circ \\ C &= 60^\circ \end{aligned}$$

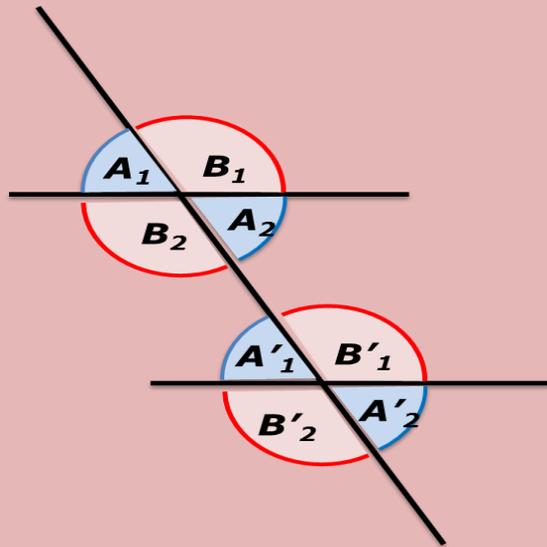


## DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE:

*Cuando una recta corta a varias rectas paralelas, en general, podemos decir lo siguiente: todos los ángulos que parecen ser agudos (menores de  $90^\circ$ ) son congruentes (tienen el mismo valor), y todos los ángulos que parecen ser obtusos (mayor de  $90^\circ$ ) son también congruentes (tienen el mismo valor). Si tomamos uno que parece obtuso y uno que parece ser agudo; entonces su suma es  $180^\circ$ , es decir, un agudo y un obtuso son suplementarios.*

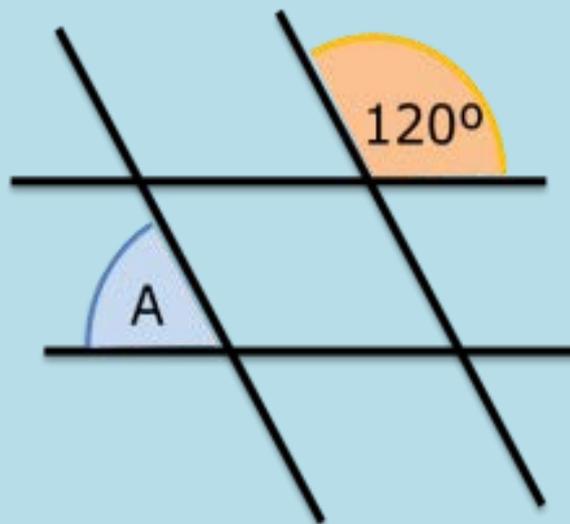
Dos rectas paralelas y una recta secante (recta que las corta a las dos paralelas) dan lugar a 8 ángulos que están relacionados entre sí:

- Los 4 ángulos que forman la secante y cualquiera de las paralelas son iguales (ver apartado de dos rectas que se cortan)
  - $B_1 = B'_1$
  - $B_2 = B'_2$
  - $A_1 = A'_1$
  - $A_2 = A'_2$
- La suma de dos ángulos adyacentes es  $180^\circ$ :
  - $A_i + B_i = 180^\circ$ .
- Los siguientes ángulos tienen el mismo valor (son congruentes):
  - $A_1 = A_2 = A'_1 = A'_2$
  - $B_1 = B_2 = B'_1 = B'_2$



## PREGUNTA:

¿Cuánto vale el ángulo A?



## SUGERENCIAS:

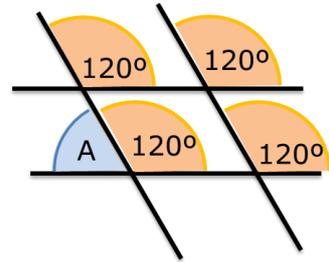
- Recuerda ángulos suplementarios y ángulos opuestos por el vértice

**RESPUESTA:**

Por las propiedades de las rectas secantes que cortan a rectas paralelas (ver pregunta anterior) son iguales. Así deducimos que todos los ángulos pintados en naranja valen  $120^\circ$ .

$120^\circ$  y  $A$  son ángulos suplementarios:

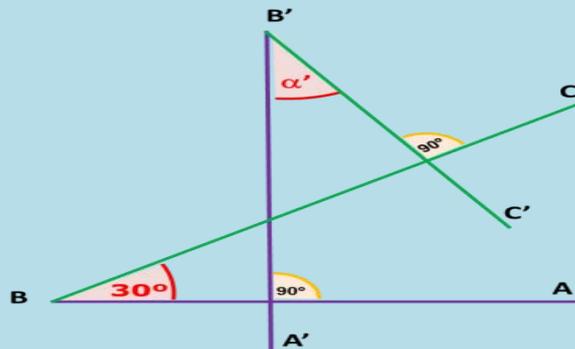
$$A = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$



1.1.5 Ángulos girados

**PREGUNTA:**

¿Cuánto vale  $\alpha'$  en la figura?

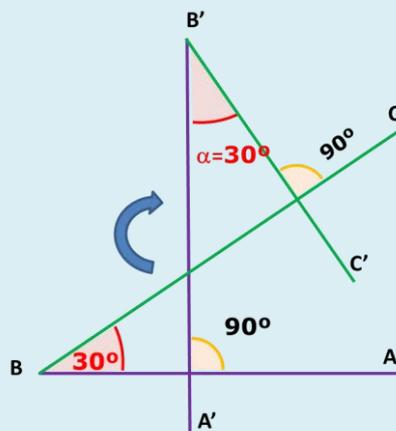


**SUGERENCIAS:**

- i. Intenta girar mentalmente el ángulo de  $30^\circ$

**RESPUESTA:**

El ángulo que se te pide es el mismo que se te da girado  $90^\circ$ , es decir:  $\alpha' = 30^\circ$



Para visualizarlo mira que las rectas que forman los dos ángulos se cruzan formando  $90^\circ$ :

BA y B'A' se cruzan formando  $90^\circ$

BC y B'C' se cruzan formando  $90^\circ$

**MATERIAL:**

**ÁNGULOS GIRADOS 90°:**

Una forma práctica de identificar **ángulos iguales pero girados 90°** es comprobar si las rectas que los forman se cruzan formando ángulos de 90°.

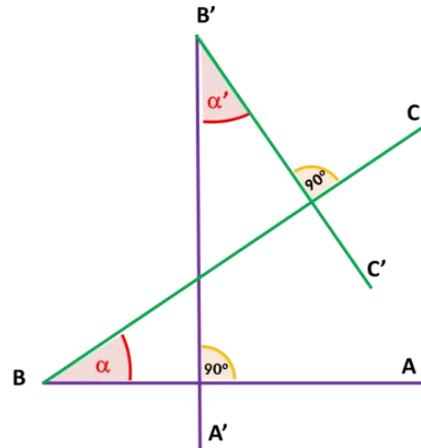
En el dibujo podemos ver que:

las líneas verdes se cruzan formando 90°

las líneas moradas se cruzan formando 90°

luego  $\alpha$  y  $\alpha'$  son el mismo ángulo girado 90°:

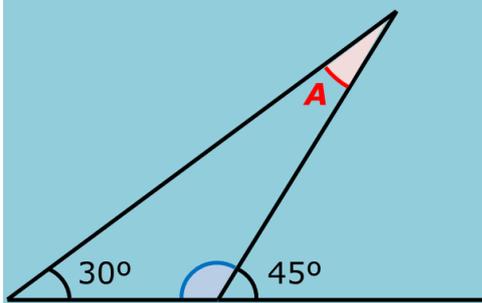
$$\alpha = \alpha'$$



1.1.6 Ángulo exterior

**PREGUNTA:**

En el dibujo, ¿cuánto vale el ángulo A?

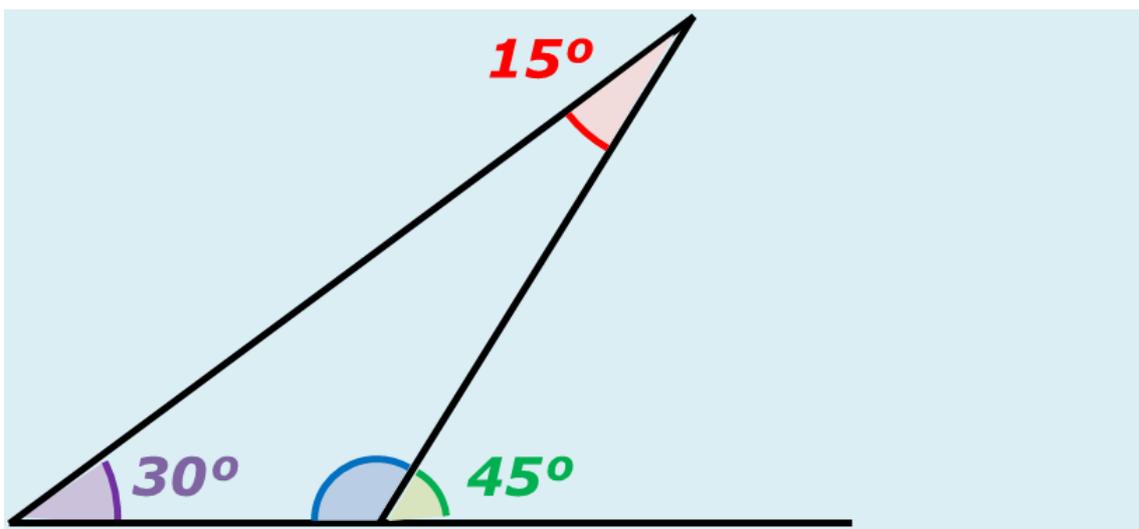


**SUGERENCIAS:**

- Tanto la suma de los ángulos del triángulo como la de los ángulos D y C es 180°.

**RESPUESTA:**

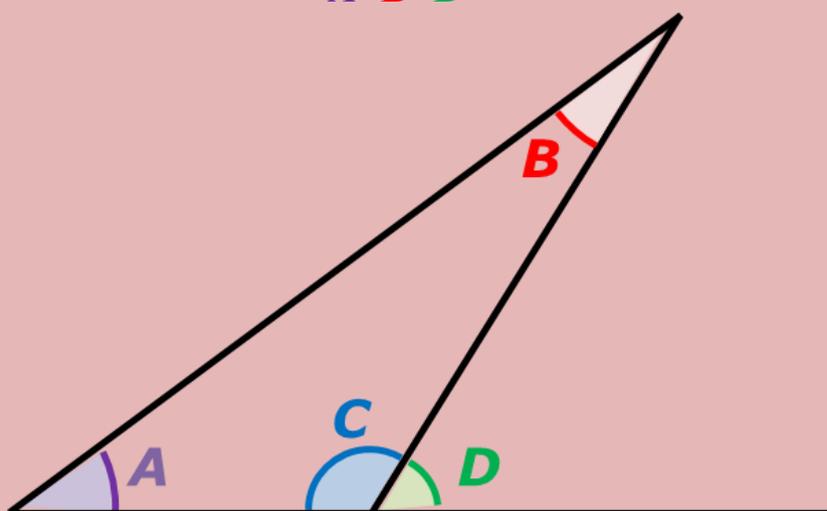
En un triángulo los ángulos exteriores son iguales a la suma de los ángulos no adyacentes:  
 $30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$



### MATERIAL:

En un triángulo los ángulos exteriores son iguales a la suma de los ángulos no adyacentes :

$$A+B=D$$



Los ángulos del triángulo,  $A$ ,  $B$  y  $C$  suman  $180^\circ$ :  $A+B+C=180^\circ$

Los ángulos complementarios  $C$  y  $D$  suman  $180^\circ$ :  $C+D=180^\circ$

$$A+B+C = 180^\circ = C+D \rightarrow A+B=D$$

### 1.2 Ejercicios –mecánica (identificar ángulos en problemas):

*Ejercicios mecánica y electromagnetismo*  $\rightarrow$  [link](#)  $\rightarrow$  *descomposición de vectores*  $\rightarrow$  [link](#)  $\rightarrow$  *triángulos rectángulos*  $\rightarrow$  [link](#)  $\rightarrow$  *identificación de ángulos*

Los ejercicios propuestos pueden trabajarse a distintos niveles:

Mi idea que hace falta desarrollar es utilizar el mismo ejercicio a distintos niveles de manera que si no es capaz de resolver el problema te vaya llevando a niveles más básicos.

- Ejercicio de identificar ángulos
- Ejercicio de relaciones en triángulos rectángulos /Ejercicio de vectores
- Ejercicio de Física

### 1.2.1 Ejercicio de plano inclinado

**Un bloque de 5 N de peso desliza sobre el plano inclinado de la figura. Si el coeficiente de rozamiento dinámico es  $\mu_e = 0.1$  calcula la aceleración con la que baja el bloque.**

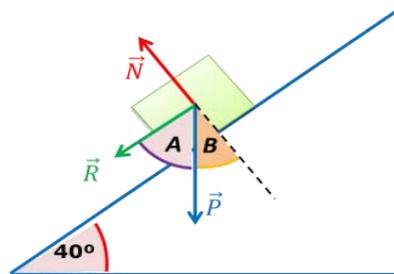
- Diagrama de fuerzas ([link dinámica](#))
- En la situación de la figura, indica cuánto valen los ángulos A y B. ([link ángulos](#))
- Si el módulo del peso es 5 N descompón el vector peso en las direcciones de la fuerza normal  $\vec{N}$  y de la fuerza de rozamiento  $\vec{R}$ . ([link vectores/triángulos rectángulos](#))
- Resuelve el sistema de ecuaciones ([link álgebra](#))

#### PREGUNTA:

En el dibujo, los ángulos señalados valen:

$$A = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

$$B = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

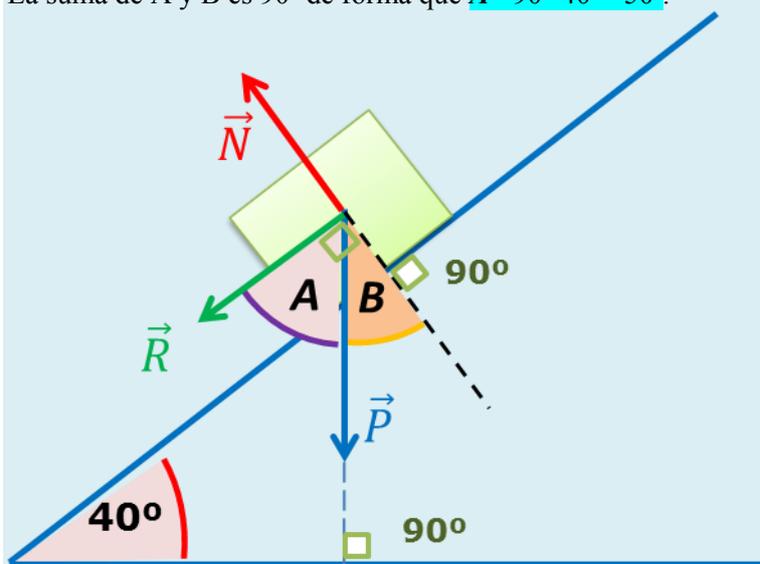


#### SUGERENCIAS:

- Busca rectas perpendiculares a las rectas que forman el ángulo de  $40^\circ$  y recuerda el apartado ángulos girados  $90^\circ$

#### RESPUESTA:

El ángulo B es igual al ángulo de  $40^\circ$  girado  $90^\circ$ , luego  $B = 40^\circ$ .  
La suma de A y B es  $90^\circ$  de forma que  $A = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$ .

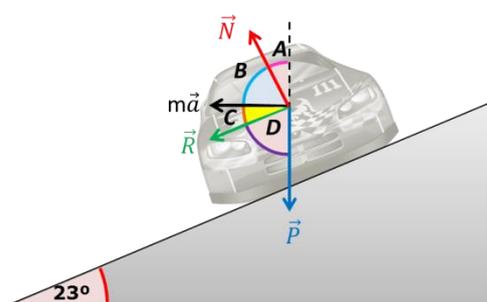


### 1.2.2 Ejercicio de peralte

**Supongamos que un vehículo de masa  $m$  se dispone a tomar una curva de radio  $R$ . Calcula la velocidad máxima con que puede tomar la curva sin derrapar, cuando la curva está peraltada y el coeficiente de rozamiento es  $\mu$ .**

- Diagrama de fuerzas ([link](#) dinámica)
- En el diagrama de fuerzas, indica cuánto valen los ángulos A, B, C y D. ([link](#) ángulos)
- Descompón las fuerzas en la dirección horizontal y vertical. ([link](#) vectores/triángulos rectángulos)
- Descompón las fuerzas en la dirección de la fuerza normal y el rozamiento. Descompón la aceleración también en esas direcciones. ([link](#) vectores)
- Resuelve el sistema de ecuaciones ([link](#) álgebra)

#### PREGUNTA:



En el dibujo, los ángulos señalados valen:

$$A = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$
$$B = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$
$$C = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$
$$D = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

#### SUGERENCIAS:

- Busca qué ángulos son iguales a  $23^\circ$

#### RESPUESTA:

El ángulo  $A$  es igual al ángulo de  $23^\circ$  girado  $90^\circ$ , luego  $A = 23^\circ$ .

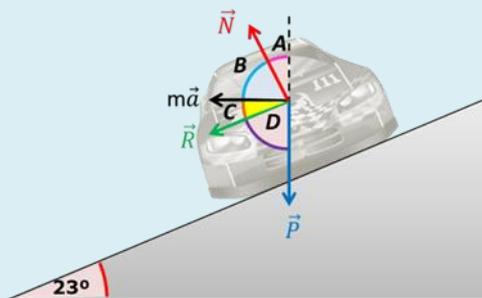
\* Piensa que el vector  $\vec{N}$  es perpendicular a la superficie inclinada y que la línea vertical es perpendicular a la horizontal.

El ángulo  $C$  es igual al ángulo de  $23^\circ$  girado  $180^\circ$ , luego  $C = 23^\circ$ .

\* Piensa que el vector  $m\vec{a}$  es paralelo a la horizontal y que el vector  $\vec{R}$  es paralelo a la superficie inclinada.

La suma de  $A$  y  $B$  es  $90^\circ$  de forma que  $B = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$ .

La suma de  $C$  y  $D$  es  $90^\circ$  de forma que  $D = 90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$ .



### 1.2.3 Ejercicio de péndulo

Considere un péndulo formado por un hilo de 1 m de longitud (sujeto por un extremo) y pequeña esfera de 100 g de masa de radio despreciable y sujeta al otro extremo del hilo. Cuando el péndulo forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical lleva una velocidad de 1 m/s. Calcule la aceleración tangencial y normal en esa situación.

- Diagrama de fuerzas ([link](#) dinámica)
- Indica cuánto valen los ángulos A, B, C y D. ([link](#) ángulos)
- Descompón las fuerzas en la dirección de la cuerda y perpendicular a ella. ([link](#) vectores/triángulos rectángulos)
- Indica qué dirección llevará la velocidad en ese instante ([link](#) cinemática).
- Resuelve el sistema de ecuaciones ([link](#) álgebra)

#### PREGUNTA:

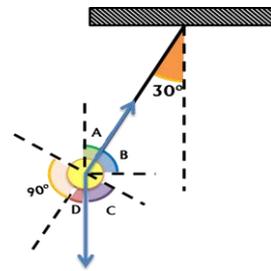
En el dibujo, los ángulos señalados valen:

$$A = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

$$B = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

$$C = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$

$$D = \boxed{\phantom{00}}^\circ$$



#### SUGERENCIAS:

- Busca ángulos que son complementarios (suman  $90^\circ$ )
- Recuerda que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes (tienen el mismo valor).

#### RESPUESTA:

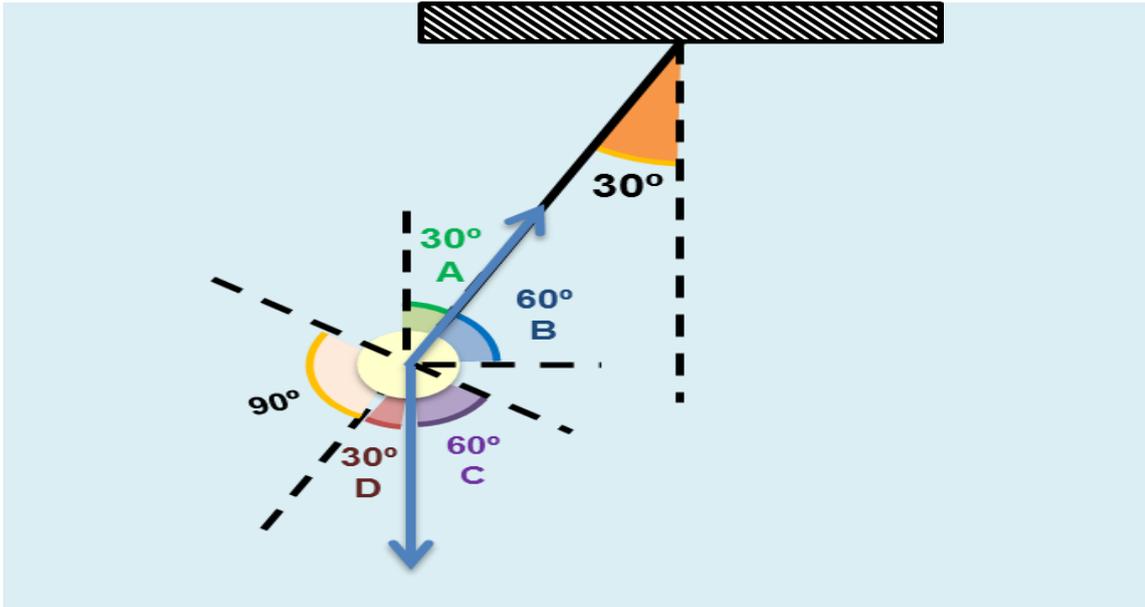
La cuerda la podemos representar por una recta que corta a dos paralelas, una vertical formando un ángulo de  $30^\circ$  y otra vertical formando el ángulo  $A$ . Esos ángulos son iguales y por tanto  $A = 30^\circ$ .

$A$  y  $B$  son complementarios luego  $B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$A$  y  $D$  son ángulos opuestos por el vértice formados por las rectas vertical y la que va en la dirección de la cuerda, por lo que hemos visto con anterioridad, esos ángulos tienen el mismo valor:  $D = A = 30^\circ$

El ángulo  $C$  es complementario a  $D$ , luego  $C = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ .

\* También podemos ver que  $B$  y  $30^\circ$  son ángulos complementarios y deducir lo demás a partir de ese resultado



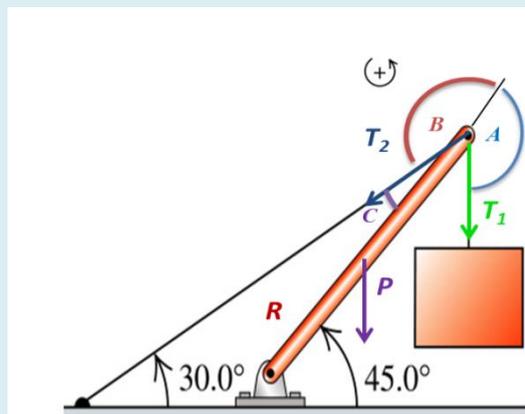
#### 1.2.4 Ejercicio equilibrio

Calcule la tensión en cada cable y la magnitud y dirección de la fuerza ejercida sobre el puntal por el pivote en los sistemas de la figura. En cada caso, sea  $P$  el peso de la caja suspendida. El puntal es uniforme y también pesa  $P$ .

- Diagrama de fuerzas ([link](#) dinámica)
- Indica cuánto valen los ángulos A, B, C y D. ([link](#) ángulos)
- Descompón las fuerzas en la dirección de la cuerda y perpendicular a ella. ([link](#) vectores/triángulos rectángulos)
- Resuelve el sistema de ecuaciones ([link](#) álgebra)

#### PREGUNTA:

En la figura, el ángulo  $A$  vale   $^\circ$ , el ángulo  $B$  vale   $^\circ$  y el ángulo  $C$  vale   $^\circ$ .



#### RESPUESTA:

El ángulo de  $45^\circ$  es un ángulo exterior al triángulo formado por la cuerda que sufre la tensión  $T_2$ , el pivote y el suelo, luego:

$$45^\circ = 30^\circ + C \rightarrow C = 15^\circ.$$

$C$  y  $B$  son suplementarios, así que:

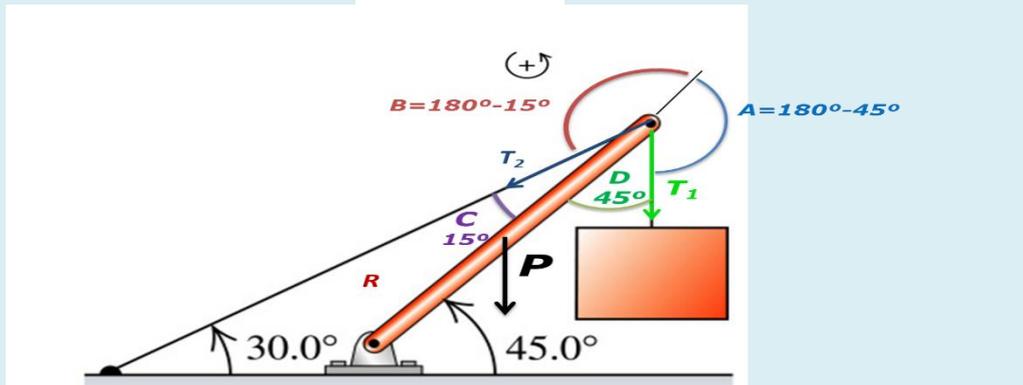
$$B = 180^\circ - 15^\circ = 165^\circ$$

El ángulo  $D$  y el ángulo de  $45^\circ$  son complementarios (ver el triángulo rectángulo que se forma), de manera que:

$$D = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ.$$

$D$  y  $A$  son suplementarios, así que

$$A = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$



**Objetivo:**

Identificar y conocer relaciones sencillas en triángulos rectángulos. Senos, cosenos, tangentes...

**Link:**

Este módulo se relaciona con

- ⇒ descomposición de vectores
- ⇒ mecánica
- ⇒ electromagnetismo

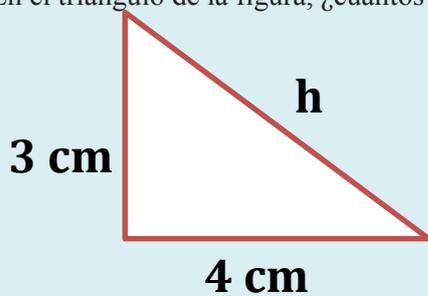
## 2 Triángulos rectángulos

### 2.1 Ejercicios elementales y teoría matemática

#### 2.1.1 Teorema de Pitágoras

##### PREGUNTA:

En el triángulo de la figura, ¿cuántos centímetros mide el lado  $h$ ?



##### SUGERENCIAS:

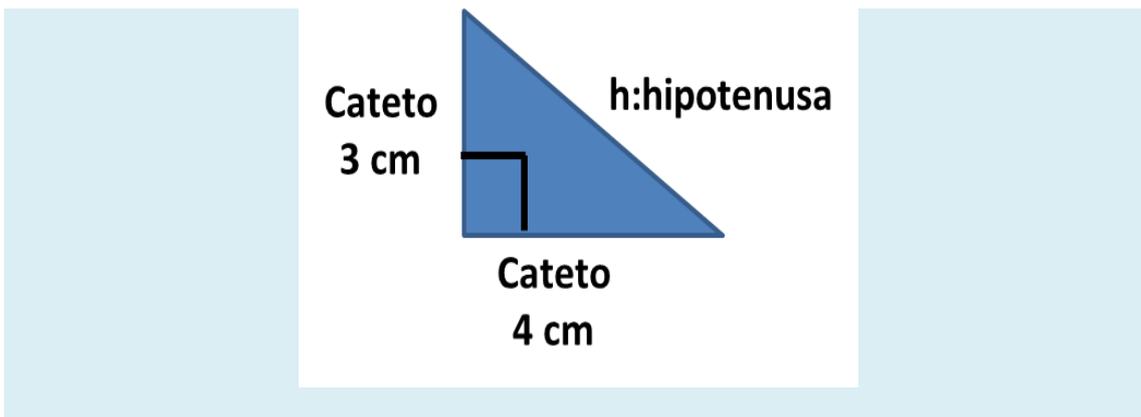
Nótese que el triángulo es un triángulo rectángulo. Identifique los catetos y la hipotenusa y aplique el teorema de Pitágoras

##### RESPUESTA:

El triángulo de la pregunta es un triángulo rectángulo de forma que podemos conocer la longitud del lado que nos piden a partir del *teorema de Pitágoras*.

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa (en la figura  $h$ ) es igual a la suma del cuadrado de los catetos (en la figura los lados de 4 cm y 3 cm):

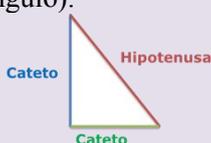
$$h^2 = (4 \text{ cm})^2 + (3 \text{ cm})^2 = 25 \text{ cm}^2$$
$$h = 5 \text{ cm}$$



### (GLOSARIO):

#### TEOREMA DE PITÁGORAS:

El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa (el lado más largo del triángulo) es igual a la suma del cuadrado de los catetos (lados más cortos que forman un ángulo de  $90^\circ$  en el triángulo).

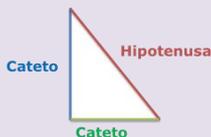


#### TRIÁNGULO RECTÁNGULO:

Se llama triángulo rectángulo a todo triángulo que tenga un ángulo recto, es decir, un ángulo de  $90^\circ$ .

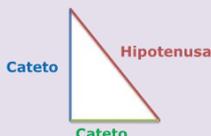
#### CATETO:

Un cateto es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo. Los catetos son los lados que conforman el ángulo recto.



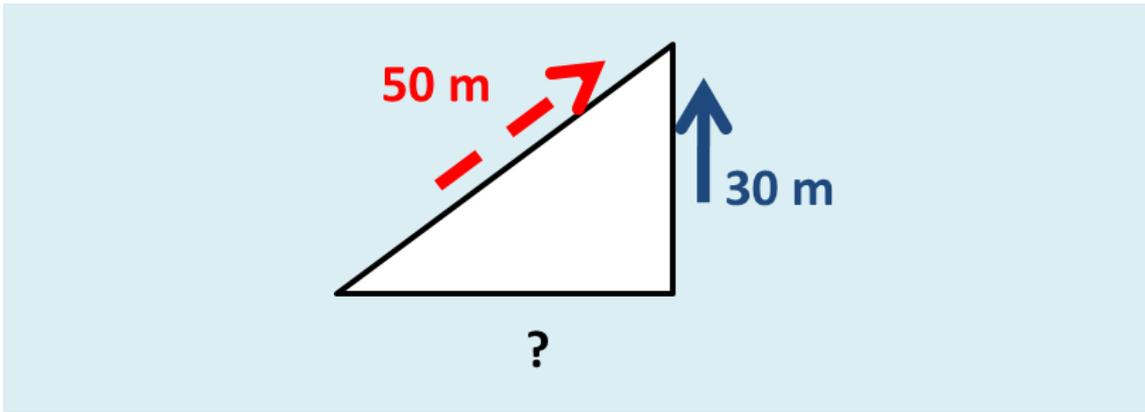
#### HIPOTENUSA:

La hipotenusa es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo. La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.



### PREGUNTA:

Un móvil se desplaza por una pendiente. Cuando ha recorrido 50 m de la superficie inclinada ha subido 30 m verticalmente. ¿Cuánto se habrá desplazado horizontalmente?



**SUGERENCIAS:**

Nótese que el triángulo es un triángulo rectángulo. Identifique los catetos y la hipotenusa y aplique el teorema de Pitágoras

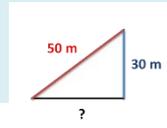
**RESPUESTA:**

Con los datos de la pregunta podemos formar un triángulo rectángulo de forma que podemos calcular la longitud que se ha desplazado horizontalmente a partir del *teorema de Pitágoras*. El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa (en la figura *h*) es igual a la suma del cuadrado de los catetos (en la figura los lados de 4 cm y 3 cm):

$$(50m)^2 = c^2 + (30 m)^2$$

$$c^2 = 2500 m^2 - 900 m^2 = 1600 m^2$$

$$c = 40 m$$

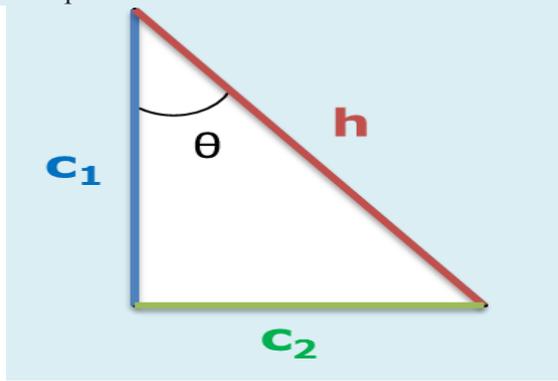


2.1.2 Relación seno, coseno y tangente

**PREGUNTA:**

Observando la figura adyacente una las parejas correspondientes

|                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| Sen $\theta =$  | $\frac{c_1}{h}$   |
| Cos $\theta =$  | $\frac{c_2}{h}$   |
| Tg $\theta =$   | $\frac{c_2}{c_1}$ |
| Cotg $\theta =$ | $\frac{c_1}{c_2}$ |



**RESPUESTA:**

Identifiquemos primero el cateto opuesto y el cateto contiguo del ángulo  $\theta$  y la hipotenusa:

- ✓  $c_1$  es el cateto contiguo (forma uno de los lados del ángulo  $\theta$ )
- ✓  $c_2$  es el cateto opuesto (forma uno de los lados del ángulo  $\theta$ )
- ✓  $h$  es la hipotenusa (el lado más largo del triángulo rectángulo)

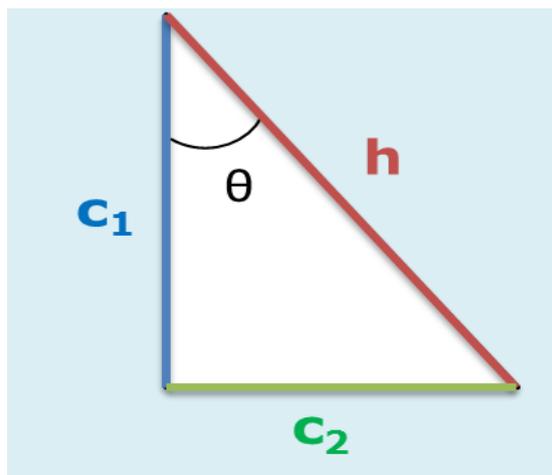
Teniendo esto en cuenta sólo tenemos que aplicar las definiciones dadas con anterioridad:

$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c_2}{h}$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c_1}{h}$$

$$\text{Tg } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{c_2}{c_1}$$

$$\text{Cotg } \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c_1}{c_2}$$



**(GLOSARIO):**

**SENO:**

En un triángulo rectángulo, para cualquiera de los ángulos distintos del ángulo recto, podemos definir la función seno del ángulo como el cociente entre las longitudes del **cateto opuesto** al ángulo y la de la **hipotenusa**.

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$



**COSENO:**

En un triángulo rectángulo, para cualquiera de los ángulos distintos del ángulo recto, podemos definir la función **coseno** del ángulo como el cociente entre las longitudes del **cateto contiguo** al ángulo y la de la **hipotenusa**.

$$\text{cosen } \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$$



**TANGENTE:**

En un triángulo rectángulo, para cualquiera de los ángulos distintos del ángulo recto, podemos definir la función **tangente** del ángulo como el cociente entre las longitudes del **cateto opuesto** al ángulo y la del cateto **contiguo**.

$$\text{tg } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}}$$



**COTANGENTE:**

En un triángulo rectángulo, para cualquiera de los ángulos distintos del ángulo recto, podemos definir la función **cotangente** del ángulo como el cociente entre las longitudes del **cateto contiguo** al ángulo y la del **cateto opuesto**.

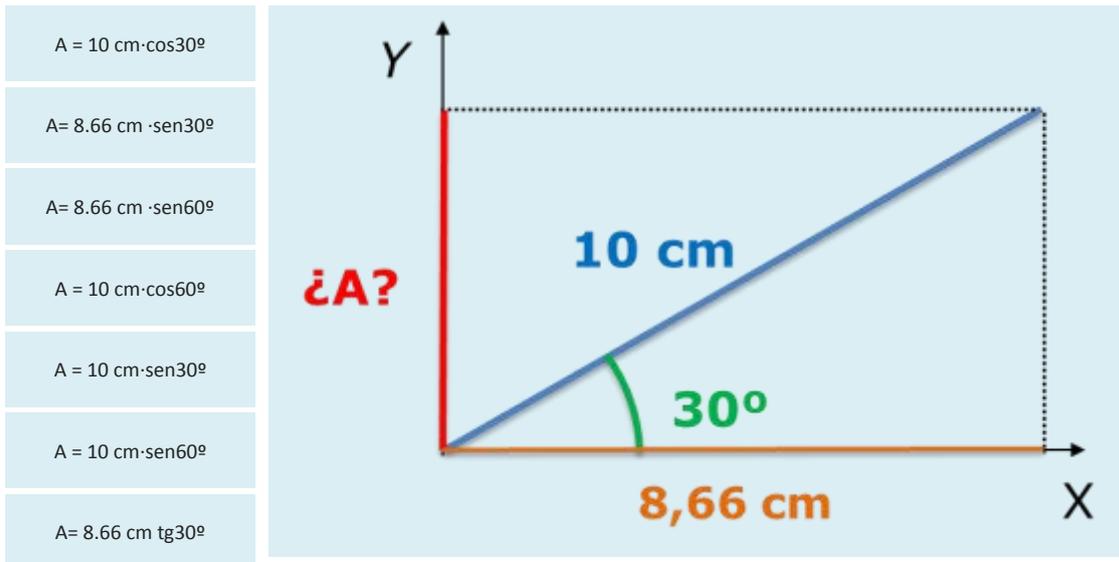
$$\text{cotg } \theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{cateto opuesto}}$$



**2.1.3 Relaciones seno y coseno de ángulos complementarios**

**PREGUNTA:**

Indica cuales de las siguientes ecuaciones se podrían emplear para calcular la longitud de A:

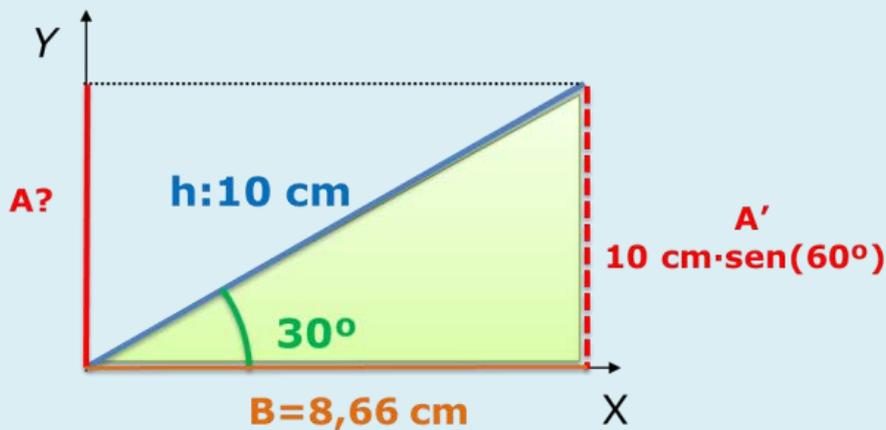


**RESPUESTA:**

Podemos formar un triángulo rectángulo de hipotenusa  $h=10 \text{ cm}$  y catetos  $B = 8.66 \text{ cm}$  y  $A'$ . Según la definición de la función seno:

$$\text{sen} 30^\circ = \frac{\text{cateto opuesto } (A')}{\text{hipotenusa } (10 \text{ cm})}$$

de donde  $A' = 10 \text{ cm} \cdot \text{sen} 30^\circ$ . Como  $A'$  tiene la misma longitud de  $A$ ,  $A = 10 \text{ cm} \cdot \text{sen} 30^\circ$  es una expresión correcta siendo incorrectas las demás referidas a 10 cm y al ángulo de  $30^\circ$ .



En ese mismo triángulo, aplicando la definición de la función tangente:  $\text{tg} 30^\circ =$

$$\frac{\text{cateto opuesto } (A')}{\text{cateto contiguo } (8.66 \text{ cm})}$$

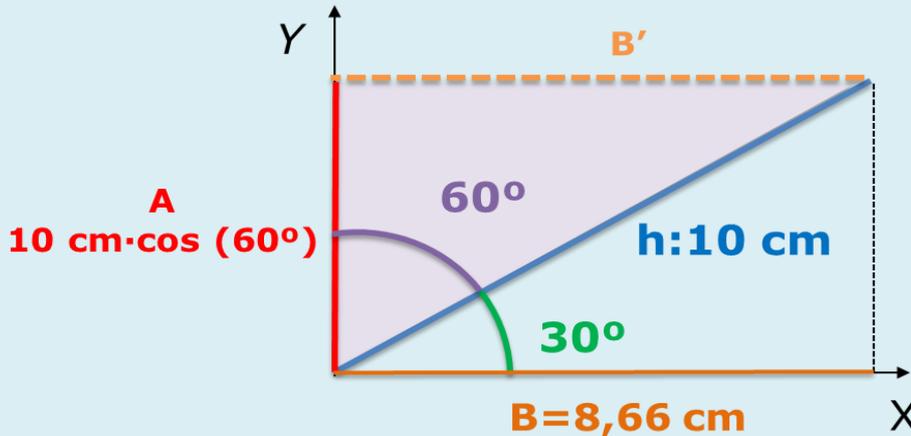
$A' = 8.66 \text{ cm} \cdot \text{tg} 30^\circ$ . Como  $A'$  tiene la misma longitud de  $A$ :

$$A = 8.66 \text{ cm} \cdot \text{tg} 30^\circ \text{ es una expresión correcta.}$$

Por otro lado, podemos trazar otro triángulo rectángulo de igual hipotenusa:  $h=10 \text{ cm}$  y catetos  $A$  y uno paralelo a  $8.66 \text{ cm}$ ,  $B'$ , en este caso,  $A$  sería el cateto contiguo al ángulo de  $60^\circ$ . Aplicando la definición de la función coseno:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto contiguo } (A)}{\text{hipotenusa } (10 \text{ cm})}$$

de donde:  $A=10 \text{ cm} \cdot \cos 60^\circ$  es una expresión correcta siendo incorrectas las demás referidas a 10 cm y al ángulo de  $60^\circ$ .



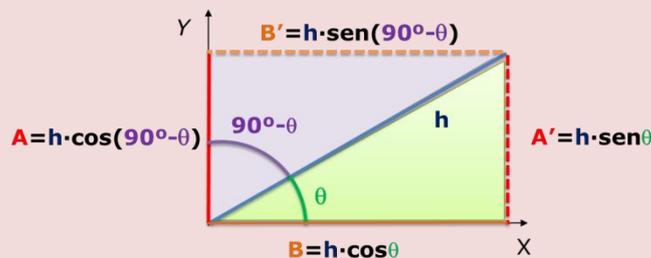
Podríamos haber llegado a la misma conclusión teniendo en cuenta las relaciones entre funciones seno y coseno en ángulos complementarios.

### RELACIONES ENTRE SENOS Y COSENOS EN ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Las funciones seno y coseno, tangente y cotangente de ángulos complementarios están relacionadas como sigue:

$$\boxed{\text{sen}(\theta) = \text{cos}(90^\circ - \theta)} \quad \boxed{\text{cos}(\theta) = \text{sen}(90^\circ - \theta)} \quad \boxed{\text{tg}(\theta) = \text{ctg}(90^\circ - \theta)} \quad \boxed{\text{ctg}(\theta) = \text{tg}(90^\circ - \theta)}$$

Para demostrar estas relaciones observemos la figura que aparece a continuación:



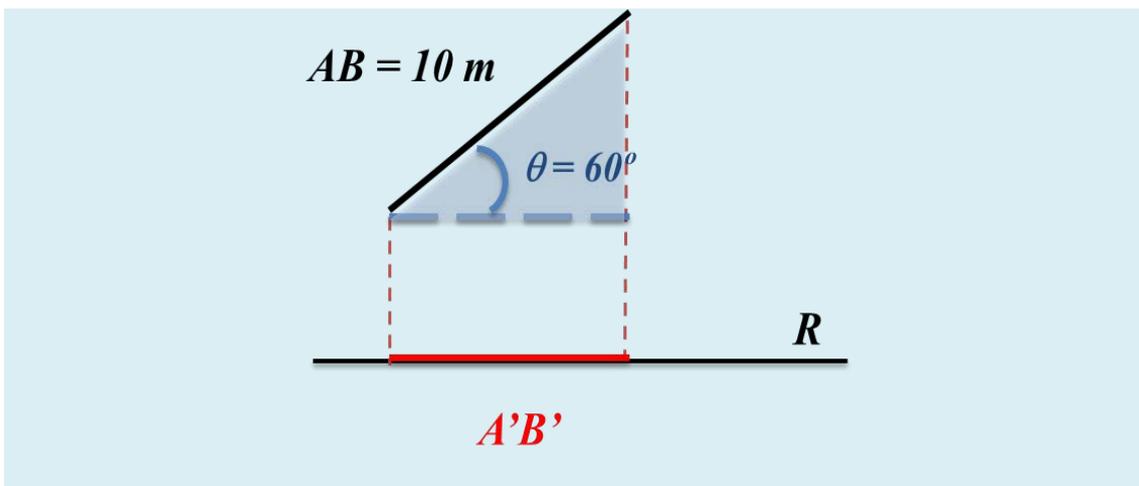
$$A=A' \rightarrow h \cdot \text{cos}(90^\circ - \theta) = h \text{ sen}(\theta) \rightarrow \text{cos}(90^\circ - \theta) = \text{sen}(\theta)$$

$$B=B' \rightarrow h \text{ cos}(\theta) = h \cdot \text{sen}(90^\circ - \theta) \rightarrow \text{sen}(90^\circ - \theta) = \text{cos}(\theta)$$

#### 2.1.4 Proyecciones

##### PREGUNTA:

La proyección ortogonal de un segmento  $AB$  sobre una recta  $R$  es el segmento  $A'B'$  sobre la recta  $R$  que se obtiene de las intersecciones de la recta con dos rectas perpendiculares (ortogonales) a la misma que pasan por los puntos inicial y final del segmento  $AB$  respectivamente. Observando la figura, ¿Cuánto vale la longitud de la proyección ortogonal,  $A'B'$ , del segmento  $AB$  en la recta  $R$ ?

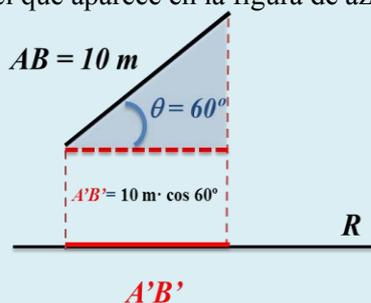


### SUGERENCIAS:

Para calcular la longitud de la proyección podemos ver que coincide con la longitud del cateto pintado de azul triángulo rectángulo dibujado en la figura y aplicar la relación que conocemos entre cateto, hipotenusa y coseno.

### RESPUESTA:

Para calcular la longitud de la proyección ortogonal sobre la recta  $R$  podemos trazar mentalmente un triángulo rectángulo tal como el que aparece en la figura de azul.



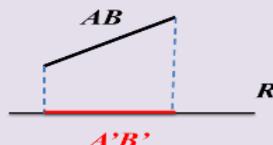
La longitud de la proyección  $A'B'$  coincide con la longitud del cateto pintado de rojo. Usando la definición de coseno,  $\cos\theta = \frac{\text{cateto contiguo}}{\text{hipotenusa}}$ , la longitud del cateto contiguo y por tanto de  $A'B'$  será:

$$A'B' = 10\text{ m} \cdot \cos 60^\circ = 5\text{ m}$$

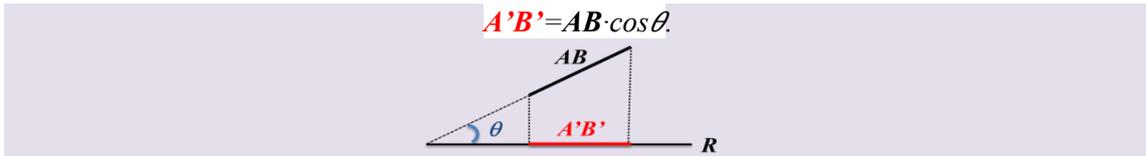
### (GLOSARIO):

#### PROYECCIÓN (ortogonal de un segmento $AB$ sobre una recta $R$ ):

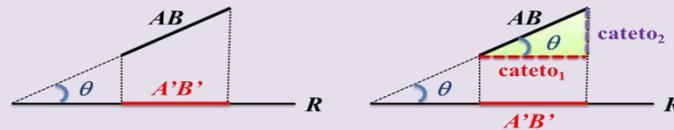
La proyección ortogonal de un segmento  $AB$  sobre una recta  $R$  es el segmento  $A'B'$  sobre la recta  $R$  que se obtiene de las intersecciones de la recta con dos rectas perpendiculares (ortogonales) a la misma que pasan por los puntos inicial y final del segmento  $AB$  respectivamente.



Si conocemos la longitud del segmento  $AB$  y el ángulo que forma el segmento  $AB$  y la recta  $R$  es fácil calcular la longitud de la proyección ortogonal como:



Para llegar a esa expresión visualizar mentalmente un triángulo rectángulo tal como el que aparece en la figura (pintado de verde): Ese triángulo tiene de lados: el segmento  $AB$ , un lado paralelo a la recta  $R$  y que corta a  $AB$  en un extremo, **cateto<sub>1</sub>**, y un lado es perpendicular al anterior y corta al segmento  $AB$  en el otro extremo, **cateto<sub>2</sub>**.



Recordando lo que sabemos de rectas que cortan a rectas paralelas, conocemos el **ángulo  $\theta$**  del triángulo es igual al **ángulo** que forma el segmento  $AB$  y la recta  $R$ .

La longitud de la proyección  $A'B'$  coincide con la longitud del **cateto<sub>1</sub>** del triángulo rectángulo pintado de rojo, que teniendo en cuenta la definición de coseno será:

$$A'B' = AB \cdot \cos\theta.$$

*Conviene pensar la proyección como la sombra que proyectaría el segmento sobre la recta  $R$  si la luz cayera sobre el segmento perpendicularmente a ella.*

#### ORTOGONAL:

**Ortogonal** es un adjetivo que se emplea para nombrar a aquello que se encuentra en un ángulo de  $90^\circ$ . Se trata de una noción que, en el caso de los espacios euclídeos, es equivalente al concepto de perpendicularidad.

#### 2.2 Ejercicios básicos (relacionados con descomposición de vectores):

*Ejercicios mecánica y electromagnetismo  $\rightarrow$ link  $\rightarrow$  descomposición de vectores  $\rightarrow$ link  $\rightarrow$  triángulos rectángulos  $\rightarrow$ link  $\rightarrow$  identificación de ángulos*

##### 2.2.1 Ángulos en %

#### PREGUNTA:

Una rampa tiene una pendiente del 10% (eso significa que por cada 10 metros que se suba se desplaza 100 m en la horizontal) qué ángulo de inclinación tiene dicha rampa?

#### SUGERENCIAS:

Dibuje un triángulo rectángulo con los datos que se dan y calcule el valor de la tangente. Calculando la arcotangente podréis sacar el ángulo.

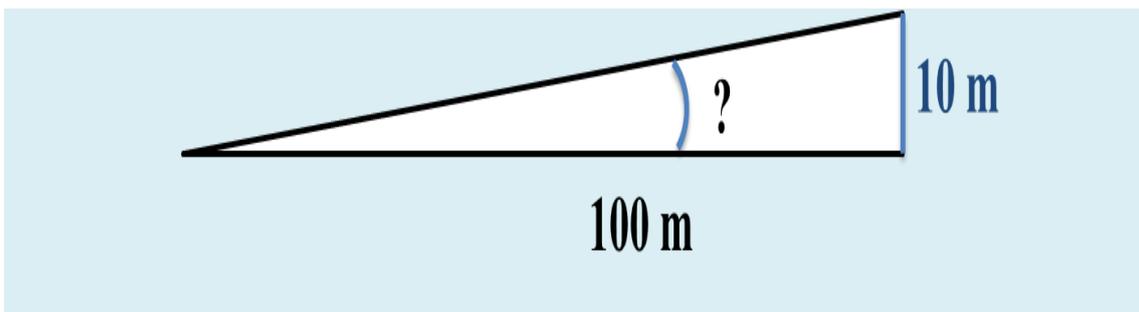
#### RESPUESTA:

Con los datos de la pregunta podemos formar un triángulo rectángulo tal como el de la figura. La tangente del ángulo que se nos pide será:

$$tg\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{10 \text{ m}}{100 \text{ m}} = 0.1.$$

Para saber el ángulo sólo tenemos que calcular la arcotangente de 0.1:

$$\text{Arcotg}(0.1) = 5,7^\circ$$



**(GLOSARIO):**

**ARCOTANGENTE:**

La arcotangente,  $\arctg$ , se define como la función inversa de la tangente de un ángulo. Nos indica el ángulo cuya tangente es la que se nos da como dato.

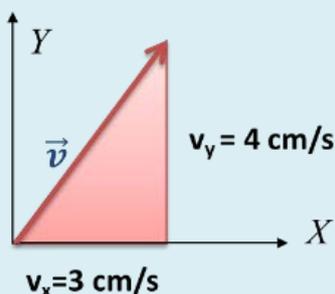
**ÁNGULO EN PORCENTAJE:**

Cuando nos dan un ángulo en porcentaje, nos indican cuantos metros se sube (cateto opuesto) por cada 100 metros desplazados en la horizontal (cateto contiguo).

**2.2.2 Descomposición velocidad**

**PREGUNTA:**

Mediante la información reflejada en la figura, calcula cuántos cm/s vale el módulo del vector velocidad (equivale a dar la longitud de la flecha).



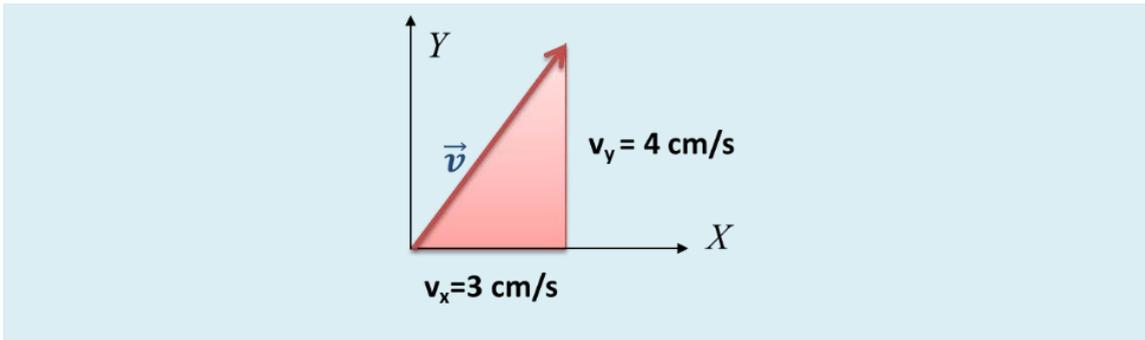
**SUGERENCIAS:**

Nótese que el triángulo es un triángulo rectángulo. Identifique los catetos y la hipotenusa y aplique el teorema de Pitágoras

**RESPUESTA:**

Con los datos de la pregunta podemos formar un triángulo rectángulo de forma que podemos calcular la longitud que se nos pide (el módulo del vector  $\vec{v}$ ) a partir del **teorema de Pitágoras**. El teorema de Pitágoras establece que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa (la longitud que se nos pide) es igual a la suma del cuadrado de los catetos (en la figura los lados de 4 cm/s y 3 cm/s):

$$h^2 = (4 \text{ cm/s})^2 + (3 \text{ cm/s})^2 = 25 \text{ (cm/s)}^2$$
$$h = 5 \text{ cm/s}$$

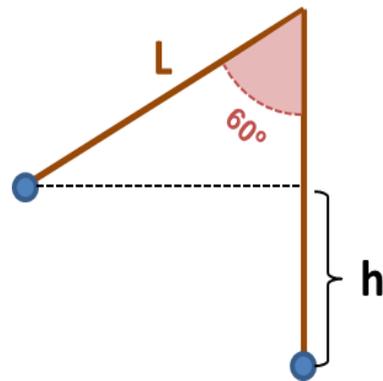


### 2.2.3 Altura en un péndulo

#### PREGUNTA:

Un péndulo simple forma un ángulo de  $60^\circ$  con la vertical. ¿A qué altura, referida al punto más bajo, se encuentra en esas condiciones la lenteja del péndulo?

- R
- $R \cos 60^\circ$
- $R \sin 60^\circ$
- $R (1 - \cos 60^\circ)$
- $R (1 - \sin 60^\circ)$

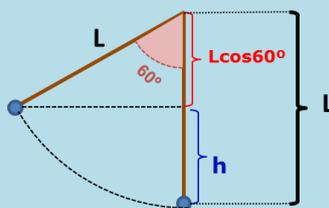


#### RESPUESTA:

El péndulo en cualquier posición va a medir una longitud  $L$ .

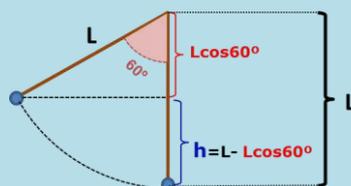
Dicha longitud será igual a la altura desde la posición más baja hasta la lenteja,  $h$ , más la altura desde la lenteja hasta donde pivota el péndulo,  $L \cos 60^\circ$  (ver Fig):

$$L = h + L \cos 60^\circ$$



Despejando  $h$ :

$$h = L - L \cos 60^\circ = L(1 - \cos 60^\circ)$$



### 2.2.4 Plano inclinado

Un bloque de 5 N de peso desliza sobre el plano inclinado de la figura. Si el coeficiente de rozamiento dinámico es  $\mu_e = 0.1$  calcula la aceleración con la que baja el bloque.

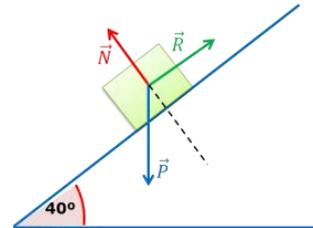
- Diagrama de fuerzas ([link dinámica](#))
- En la situación de la figura, indica cuánto valen los ángulos A y B. ([link ángulos](#))
- Si el módulo del peso es 5 N descompón el vector peso en las direcciones de la fuerza normal  $\vec{N}$  y de la fuerza de rozamiento  $\vec{R}$ . ([link vectores/triángulos rectángulos](#))
- Resuelve el sistema de ecuaciones ([link álgebra](#))

### PREGUNTA:

Si el módulo (longitud) del vector  $\vec{P}$  es 5 N:

su proyección en la dirección del vector  $\vec{N}$  es:

y su proyección en la dirección del vector  $\vec{R}$  es:

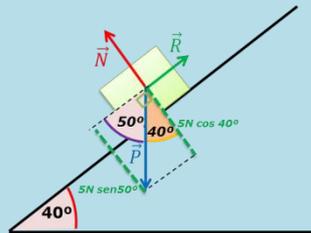


### RESPUESTA:

El ángulo *naranja* es igual al ángulo que forma la pendiente con la horizontal girado  $90^\circ$ , luego dicho ángulo vale  $40^\circ$ . La suma del ángulo morado y del naranja es  $90^\circ$  de forma que el ángulo morado es  $50^\circ$

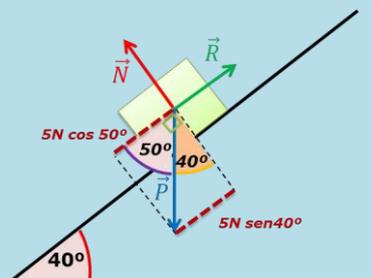
La proyección del vector  $\vec{P}$  en la dirección del vector  $\vec{N}$  es:

$5\text{N} \cos 40^\circ$ , esa longitud coincide con la de  $5\text{N} \sin 50^\circ$  (ver figura).



y su proyección en la dirección del vector  $\vec{R}$  es:

$5\text{N} \cos 50^\circ$ , esa longitud coincide con la de  $5\text{N} \sin 40^\circ$  (ver figura) :



### 2.2.5 Ejercicio de peralte

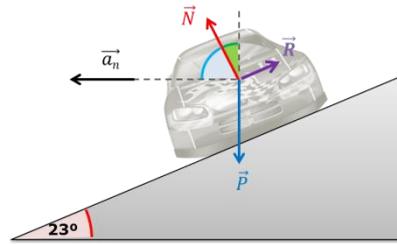
### PREGUNTA:

Si el módulo (la longitud) del vector  $\vec{N}$  es 1 N:  
 su proyección en la dirección del vector  $\vec{a}_n$  es

$1 \text{ N} \cdot \text{sen } \square^\circ$  o  $1 \text{ N} \cdot \text{cos } \square^\circ$

y su proyección en la dirección del vector  $\vec{P}$  es

$1 \text{ N} \cdot \text{sen } \square^\circ$  o  $1 \text{ N} \cdot \text{cos } \square^\circ$

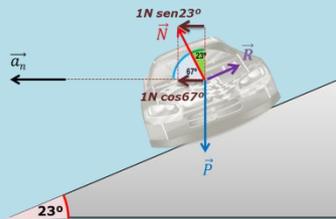


**RESPUESTA:**

El ángulo verde es igual al ángulo de  $23^\circ$  girado  $90^\circ$ \*. La suma de los ángulos verde y azul es  $90^\circ$  de forma que el ángulo azul es  $90^\circ - 23^\circ = 67^\circ$ .

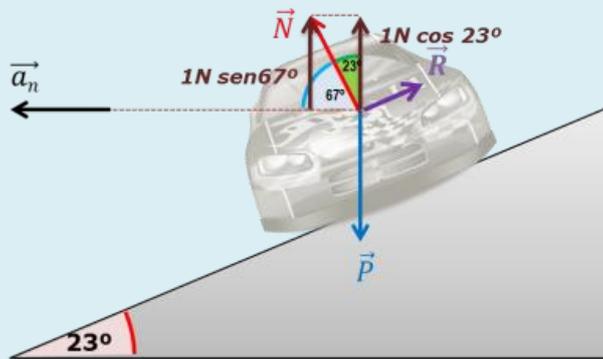
La proyección de  $\vec{N}$  en la dirección horizontal (dirección de la aceleración normal) será

$1 \text{ N} \cos 67^\circ$ , esa longitud coincide con la de  $1 \text{ N} \text{sen} 23^\circ$  (ver figura).



La proyección de  $\vec{N}$  en la dirección vertical (dirección del vector peso) será:

$1 \text{ N} \cos 23^\circ$ , esa longitud coincide con la de  $1 \text{ N} \text{sen} 67^\circ$  (ver figura).

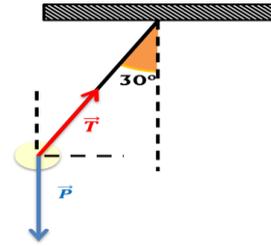


\* Para ver el giro piensa que el vector  $\vec{N}$  es perpendicular a la superficie inclinada y que la línea vertical es perpendicular a la horizontal.

2.2.6 Componentes normal y tangencial del peso en un péndulo

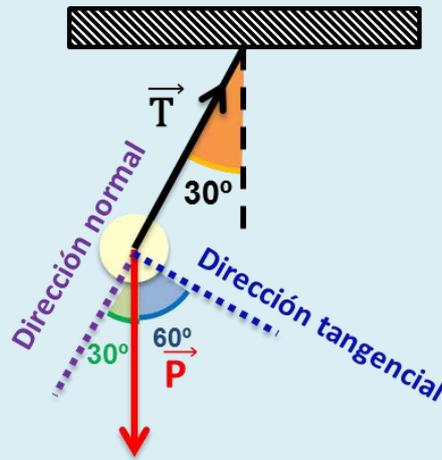
**PREGUNTA:**

Si el módulo (la longitud) del vector  $\vec{P}$  es 1 N:  
su proyección en la dirección tangencial al movimiento es  
 $1 \text{ N} \cdot \cos \square^\circ$  o  $1 \text{ N} \cdot \text{sen} \square^\circ$   
y su proyección en la dirección normal al movimiento es  
 $1 \text{ N} \cdot \cos \square^\circ$  o  $1 \text{ N} \cdot \text{sen} \square^\circ$



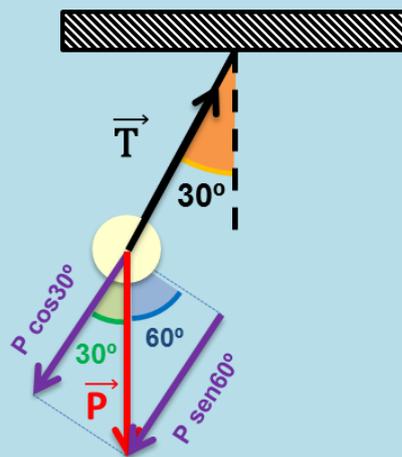
### RESPUESTA:

La dirección normal al movimiento es la dirección de la recta donde está contenida la cuerda. La figura nos muestra que la cuerda forma un ángulo de  $30^\circ$  con la vertical. Por lo que explicamos de paralelas que cortan a una recta, el ángulo (agudo) que forma la prolongación de la cuerda con el peso será de  $30^\circ$ .



Teniendo esto en cuenta, la proyección de  $\vec{P}$  en la dirección normal será:

$1 \text{ N} \cos 30^\circ$  o  $1 \text{ N} \text{sen} 60^\circ$  (ver figura).



y la proyección de  $\vec{P}$  en la dirección tangencial será

$1 \text{ N} \cos 60^\circ$  o  $1 \text{ N} \text{sen} 30^\circ$  (ver figura).

