Contenido

VECTORES

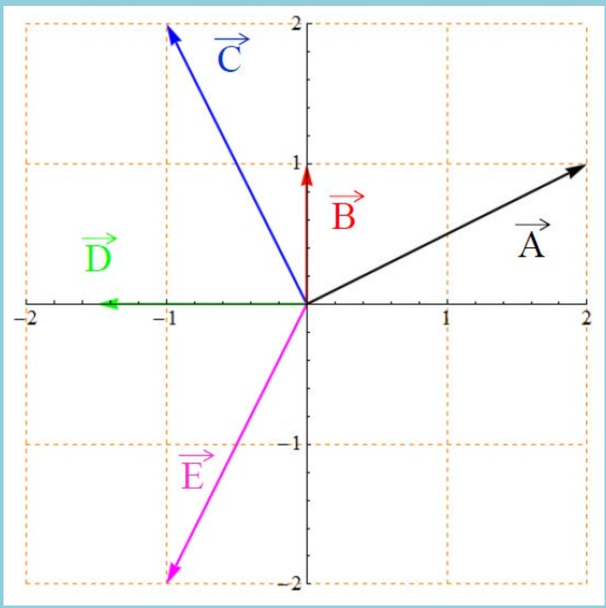
1 Componentes de un vector

Objetivos:
1) Identificar y calcular las componentes de un vector. 2) Calcular el módulo y la dirección de un vector conocidas sus componentes.
Link:
Este módulo se relaciona con: 1) Trigonometría.

1.1 Componentes cartesianas de un vector

1.1.1 Identificación gráfica de las componentes cartesianas de un vector

1. PREGUNTA:
Indica cuáles son las componentes cartesianas de todos los vectores que aparecen en la figura adjunta.



SUGERENCIAS:
a. Recuerda que las componentes de un vector son cantidades escalares con signo.
b. Cuando un vector es perpendicular a una determinada dirección, su proyección sobre esa dirección es nula, y por lo tanto la componente en esa dirección es cero.

MATERIAL:
(GLOSARIO)
Componente de un vector en una dirección:
Cantidad escalar resultante de la proyección de un vector en una dirección dada.

(GLOSARIO)
Componentes cartesianas:
Cantidades escalares resultantes de proyectar un vector en las direcciones de los ejes de un sistema de referencia cartesiano.

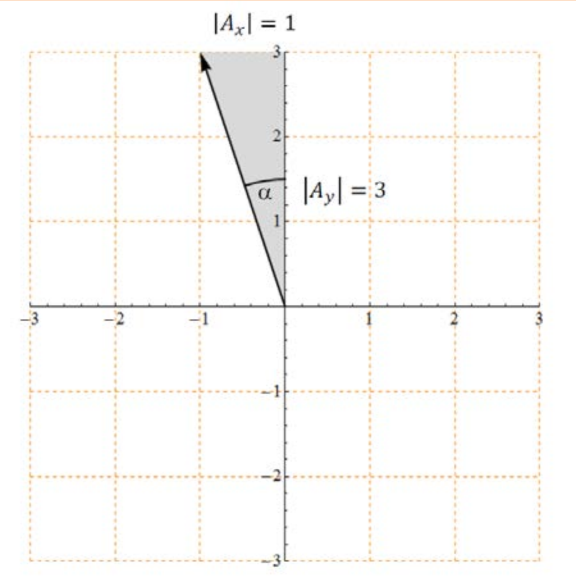
1.1.2 Cálculo del módulo y la dirección a partir de componentes cartesianas

2. PREGUNTA:
Considera de nuevo los vectores de la figura de la Pregunta 1. Calcula el módulo de cada uno de ellos y el ángulo que forman con el eje *x*.

SUGERENCIAS:

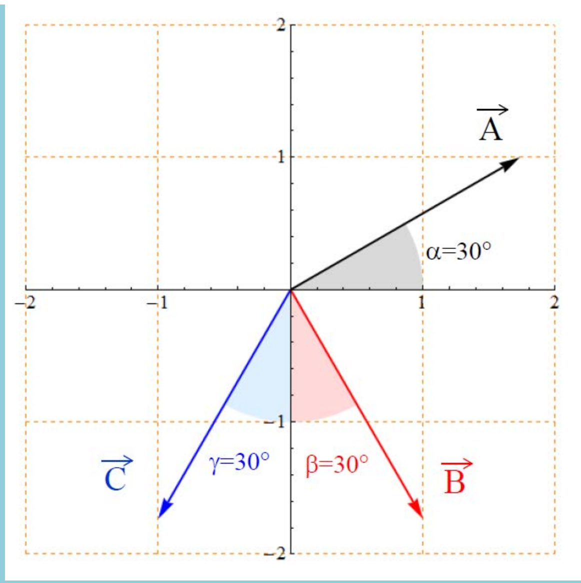
a. Piensa que las componentes del vector (en valor absoluto) las puedes considerar los catetos de un triángulo rectángulo. La hipotenusa de este triángulo te daría el módulo.
b. Conocidos los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, los ángulos se pueden calcular mediante relaciones trigonométricas.

EJEMPLO: Calculemos el módulo y el ángulo que forma el vector de la figura con el eje *x*. De acuerdo con el dibujo, la hipotenusa del triángulo sería $\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$. Éste sería por tanto el módulo del vector. Por otro lado, el ángulo α que forma este vector con el eje *y* satisface $\cos\alpha=\frac{|A_y|}{|\vec{A}|}=\frac{3}{\sqrt{10}}$, y también $\text{sen}\,\alpha=\frac{|A_x|}{|\vec{A}|}=\frac{1}{\sqrt{10}}$. De estas ecuaciones se obtiene que $\alpha=\text{arcsen}\,\frac{1}{\sqrt{10}}=\text{arcos}\,\frac{3}{\sqrt{10}}=18.43°$. Por tanto, el ángulo que forma este vector con el eje *x* es 108.43°.



1.1.3 Cálculo de las componentes cartesianas (descomposición de vectores)

3. PREGUNTA:
Calcula las componentes cartesianas de los vectores de la figura adjunta a partir de los módulos de dichos vectores y de los ángulos que se muestran en la figura. En todos los casos el módulo de los vectores es de 2 unidades de longitud.



SUGERENCIAS:

a. Piensa que las componentes del vector (en valor absoluto) las puedes considerar los catetos de un triángulo rectángulo. La hipotenusa de este triángulo te daría el módulo.
b. Conocidos los ángulos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo, los catetos se pueden calcular mediante relaciones trigonométricas.
c. ¡Pero no olvides que las componentes son cantidades escalares con signo!

EJEMPLO: Calculemos las componentes cartesianas de un vector cuyo módulo es 4 y forma un ángulo de 150° con el eje *x* (véase figura). Si consideramos el triángulo marcado en la figura, y el ángulo α=30°, podemos establecer las siguientes relaciones trigonométricas:

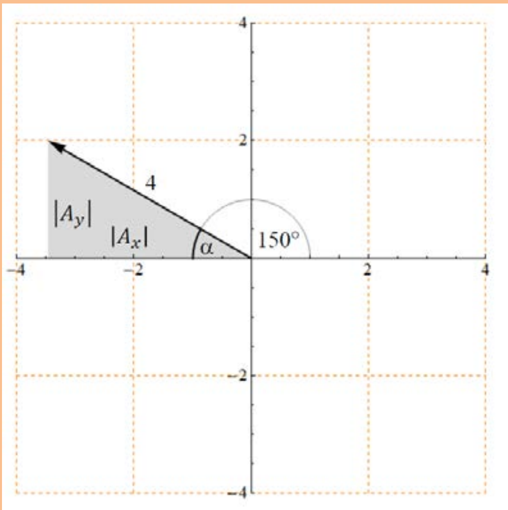
$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|A_y|}{|\vec{A}|}$ $\quad\cos\alpha = \frac{|A_x|}{|\vec{A}|}$

De donde:

$|A_y| = |\vec{A}|\operatorname{sen}\alpha$ $\qquad |A_x| = |\vec{A}|\cos\alpha$

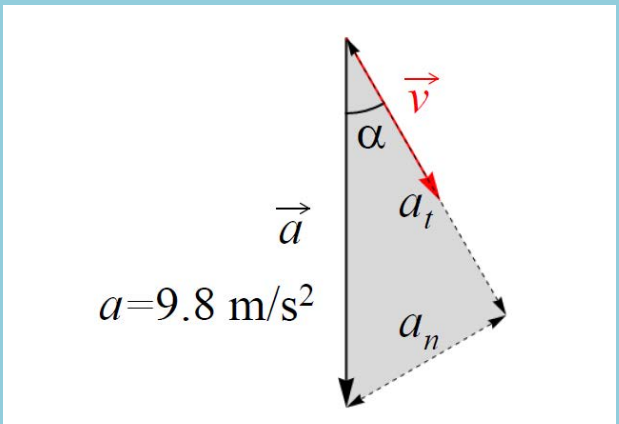
$A_y = 4\operatorname{sen}30° = 2$ $\qquad A_x = -|\vec{A}|\cos\alpha = -3.464$

Observa que el signo menos de la componente *x* lo hemos introducido porque sabemos que, de acuerdo con el dibujo, dicha componente es negativa.



1.2 Componentes tangencial y normal de aceleraciones y fuerzas

4. PREGUNTA:
Calcula las componentes tangencial y normal del vector aceleración que aparece en la figura (α=30°).



SUGERENCIAS:

a. En cinemática y dinámica es muy habitual descomponer los vectores aceleración y fuerza tomando el vector velocidad como referencia.
b. La descomposición se puede hacer fácilmente si conoces el ángulo que forma dicho vector con el vector velocidad y aplicas relaciones trigonométricas.

MATERIAL:
(GLOSARIO)
Componente tangencial de un vector:
Proyección de un vector en la dirección del vector velocidad. Habitualmente se aplica a los vectores aceleración y fuerza.

(GLOSARIO)
Componente normal de un vector:
Proyección de un vector en la dirección perpendicular al vector velocidad. Habitualmente se aplica a los vectores aceleración y fuerza.

2 Notación vectorial

5. PREGUNTA:
Relaciona los vectores de la lista de la izquierda, escritos en forma de trinomios, con los vectores de la lista de la derecha, escritos en forma cartesiana.

a) $3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$	1) (1,–1,0)
b) $\hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$	2) (0,1,1)
c) $\hat{\jmath} + \hat{k}$	3) (1, –2,0)
d) $-\hat{k}$	4) (3, –1,2)
e) $\hat{\imath} - \hat{\jmath}$	5) (0,0, –1)

MATERIAL:

Expresión cartesiana de un vector:

Si las componentes de un vector son A_x, A_y y A_z el vector se expresa en forma cartesiana como $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$.

Vectores expresados como trinomios (o binomios):

Observa que:

$\vec{A} = \left(A_x, A_y, A_z\right) = A_x(1{,}0{,}0) + A_y(0{,}1{,}0) + A_z(0{,}0{,}1)$ (¡Compruébalo tú mismo!)

Los vectores (1,0,0), (0,1,0) y (0,0,1) son vectores de módulo unidad que apuntan en las direcciones de los ejes x, y, y z, respectivamente. En Física estos vectores se suelen simbolizar como $(1{,}0{,}0) \equiv \hat{\imath}$, $(0{,}1{,}0) \equiv \hat{\jmath}$, $(0{,}0{,}1) \equiv \hat{k}$. Por tanto, el vector se puede expresar como el siguiente trinomio:

$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$

6. PREGUNTA:

La mayoría de las siguientes expresiones relacionadas con vectores y sus componentes son incorrectas. ¿Por qué? Identifica las razones de entre aquellas que aparecen listadas más abajo. ¿Qué expresiones son correctas?

a) $\vec{v} = 2\text{ m/s}$

b) $v_x = 2\hat{\imath}\text{ m/s}$

c) $r = r_0 + v_0 t$ (donde r es el vector posición, r_0 el vector posición inicial, y v_0 el vector velocidad)

d) $\vec{v} = \left(2\vec{\imath}, 3\vec{\jmath}, -2\vec{k}\right)\text{ m/s}$

e)$(x, y, z) = (x_0 + v_{0x}t, y_0 + v_{0y}t, z_0 + v_{zx}t)$

f) $x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} = (x_0 + v_{0x}t)\hat{\imath} + \left(y_0 + v_{0y}t\right)\hat{\jmath} + (z_0 + v_{zx}t)\,\hat{k}$

g) $\vec{v} = (3x + 2y - 3z)\ \text{ m/s}$

h) $\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{4\text{ m}}{2\text{ s}} = 2\hat{\imath}\text{ m/s}$

Razones por las que pueden ser incorrectas:

1) Mezcla la notación cartesiana y los vectores unitarios.

2) Uno de los pasos intermedios no tiene carácter vectorial.

3) El primer miembro es vectorial y el segundo tiene una notación que induce a confusión.

4) La ecuación está escrita en términos escalares cuando debería ser una ecuación vectorial.

5) El primer miembro es escalar mientras que el segundo es vectorial.

6) El primer miembro es vectorial pero el segundo es escalar.

SUGERENCIAS:

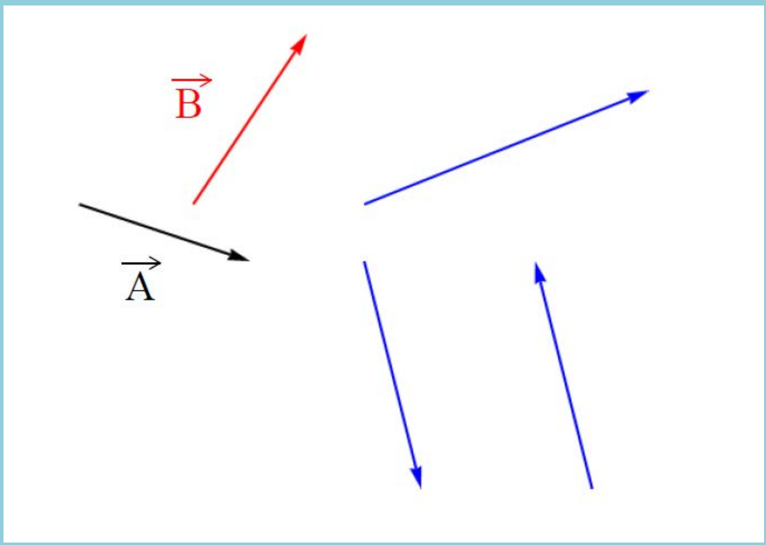
a. Recuerda que las componentes de un vector son cantidades escalares.

b. Los vectores pueden expresarse en función de sus componentes tanto en notación cartesiana como en forma de trinomio (o binomio cuando son vectores del plano).

3 Suma y diferencia de vectores

3.1 Suma y diferencia gráficas

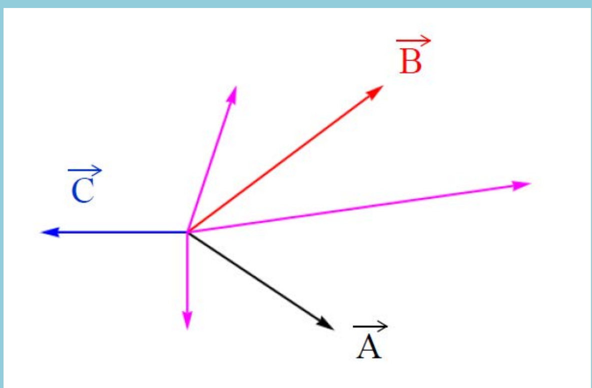
7. PREGUNTA:
En la parte izquierda de la figura tienes los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. A continuación tienes tres vectores que representan la suma de estos dos vectores, la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$, y la diferencia $\vec{B}-\vec{A}$. Averigua cuál es cual razonadamente.



MATERIAL:
Suma gráfica de vectores:
Para sumar gráficamente dos vectores debes:
a. Colocar el origen del segundo vector en el extremo final del primero.
b. Trazar un vector que une el origen del primer vector con el extremo final del segundo.

Diferencia gráfica dos vectores:
Para realizar de manera gráfica la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$ debes:
a. Mover uno de ellos para que coincidan en el origen.
b. Trazar un vector que une el extremo final de $\vec{B}$ con el extremo final de $\vec{A}$.

8. PREGUNTA:
En la figura se muestran los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$. También se incluyen en color magenta los vectores $\vec{A}+\vec{B}$, $\vec{A}+\vec{C}$ y $\vec{C}+\vec{B}$. Averigua cuál es cual razonadamente.

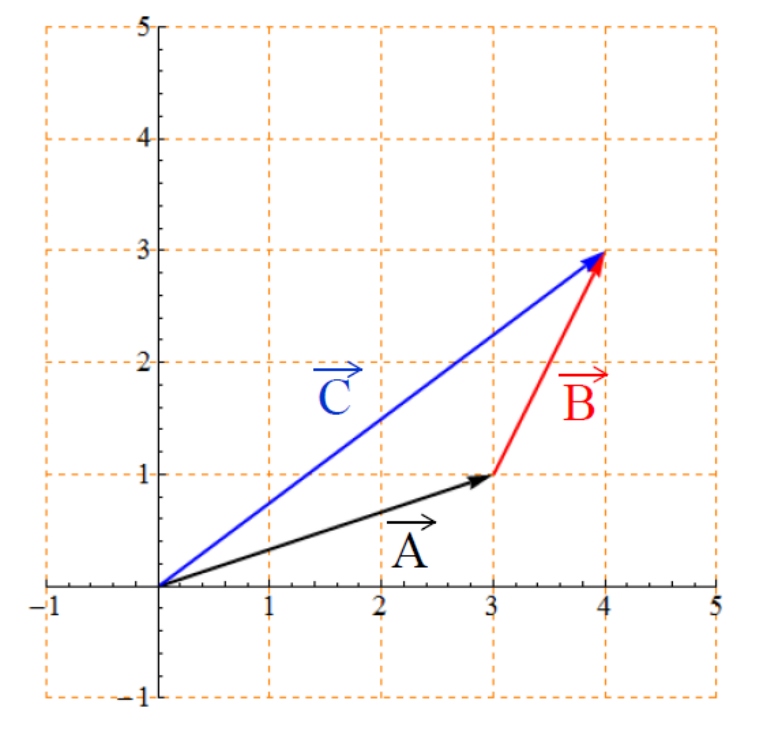


3.2 Suma de vectores mediante componentes

9. PREGUNTA:

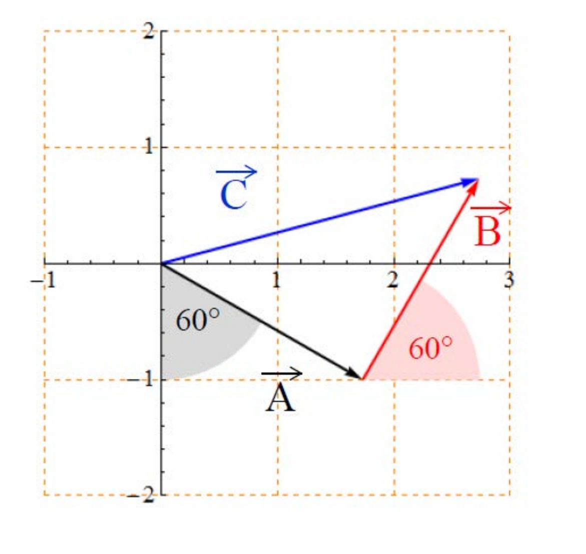
En la figura adjunta tienes los vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$. Mediante inspección visual de dicha figura, identifica las componentes x e y de cada vector. A partir de ellas calcula el módulo de cada vector y completa esta tabla:

Vector	Componente x	Componente y	Módulo
$\vec{A}$			
$\vec{B}$			
$\vec{C}$			
RESPONDE:	¿Se cumple $C_x = A_x + B_x$? SI/NO	¿Se cumple $C_y = A_y + B_y$? SI/NO	¿Se cumple $\lvert\vec{C}\rvert = \lvert\vec{A}\rvert + \lvert\vec{B}\rvert$? SI/NO ¿Se cumple $\lvert\vec{C}\rvert < \lvert\vec{A}\rvert + \lvert\vec{B}\rvert$? SI/NO



10. PREGUNTA:

En la figura adjunta tienes los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El módulo de ambos vectores es de 2 unidades de longitud. Calcula el vector $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.



SUGERENCIAS:

a. Calcula primero las componentes cartesianas de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a partir del módulo y la dirección de ambos vectores.

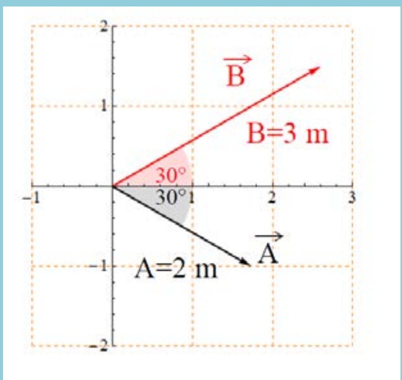
4 Producto escalar y producto vectorial

4.1 Producto escalar

4.1.1 Definición de producto escalar

11. PREGUNTA:

Calcula el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ a partir de los datos que se muestran en la figura.



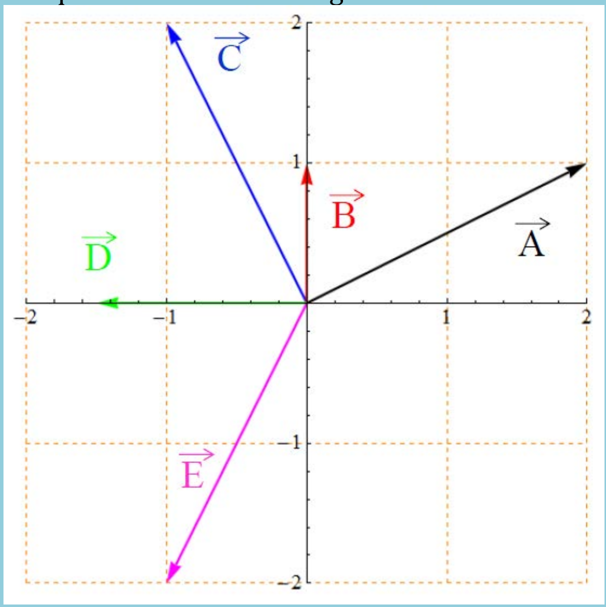
MATERIAL:

Definición de producto escalar:

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos\alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

4.1.2 Cálculo del producto escalar a partir de componentes cartesianas

12. PREGUNTA:
Calcula los productos escalares $\vec{A}\cdot\vec{B}$, $\vec{C}\cdot\vec{D}$, $\vec{C}\cdot\vec{A}$ y $\vec{A}\cdot\vec{E}$ a partir de las componentes de cada uno de los vectores que se muestra en la figura.



MATERIAL:
Cálculo del producto escalar a partir de componentes cartesianas:
$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$

4.1.3 El signo del producto escalar

13. PREGUNTA:
Considera de nuevo los vectores y los productos escalares de la pregunta anterior. Completa la siguiente tabla.

Producto escalar	El producto escalar es ¿menor que cero, cero o mayor que cero?	El ángulo que forman los dos vectores es ¿menor que 90°, 90° o mayor que 90°?
$\vec{A}\cdot\vec{B}$		
$\vec{C}\cdot\vec{D}$		
$\vec{C}\cdot\vec{A}$		
$\vec{A}\cdot\vec{E}$		

4.1.4 Cálculo del ángulo que forman dos vectores

14. PREGUNTA:
Considera los vectores $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$ y $\vec{B} = \hat{\imath} - 2\hat{\jmath}$. Calcula el ángulo que forman.

SUGERENCIAS:

a. Calcula primero el producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$ a partir de sus componentes.
b. Calcula después los módulos de ambos vectores.
c. Recuerda que $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos \alpha$ y despeja $\cos \alpha$.
d. Finalmente calcula el ángulo

4.1.5 Componente de un vector calculada con producto escalar

15. PREGUNTA:
Considera el vector $\vec{A} = 3\hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k}$. Calcula los productos escalares que se indican en la siguiente tabla.

Producto escalar:	Pregunta:
$\vec{A} \cdot \hat{\imath} =$	¿Coincide con A_x?
$\vec{A} \cdot \hat{\jmath} =$	¿Coincide con A_y?
$\vec{A} \cdot \hat{k} =$	¿Coincide con A_z?

¿Se puede afirmar por tanto lo siguiente?
"Si multiplicamos escalarmente un vector por el vector unitario asociado a un eje de coordenadas, obtenemos la componente del vector en ese eje."

Este resultado es generalizable a cualquier dirección (no sólo las de los ejes de coordenadas).

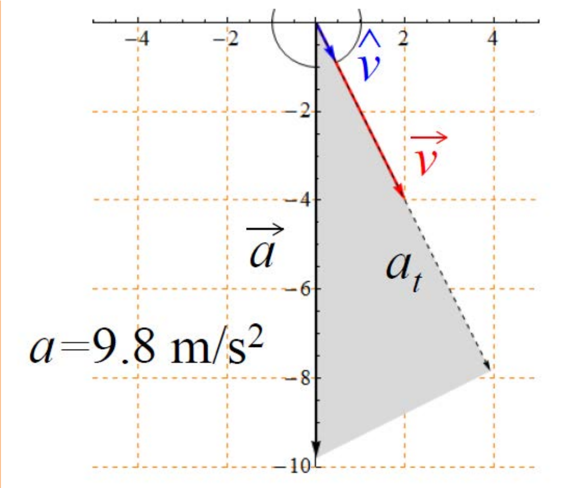
16. PREGUNTA:
Considera el vector aceleración $\vec{a} = -9.8\hat{\jmath}$ m/s² y el vector velocidad $\vec{v} = 2\hat{\imath} - 4\hat{\jmath}$ m/s. Calcula la componente tangencial de la aceleración (componente de la aceleración en la dirección de la velocidad).

MATERIAL:
Método de resolución 1:
Puedes calcular el ángulo α que forman los dos vectores (como has hecho en la pregunta 14) y después aplicar trigonometría (como hiciste en la pregunta 4).

MATERIAL:
Método de resolución 2:
Se puede hacer con la ayuda del producto escalar y sin tener que calcular el ángulo α de la manera siguiente:

a. Primero calcula el vector unitario $\hat{v} = \vec{v}/|\vec{v}|$.
b. Recuerda que lo que has aprendido en la pregunta 15: "*La componente de un vector en una dirección se puede obtener multiplicando escalarmente por un vector unitario en dicha dirección*"

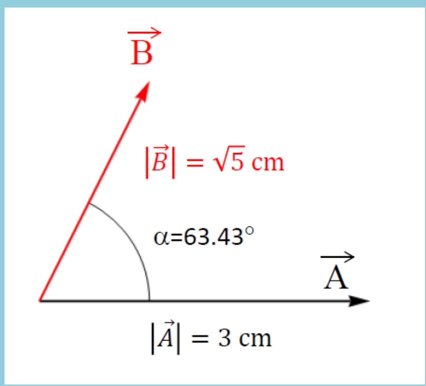
EJEMPLO: La siguiente figura resume la situación que se está analizando en este problema, y te puede ser útil no sólo para entender el procedimiento, sino para comprobar que tu solución es correcta.



4.2 Producto vectorial

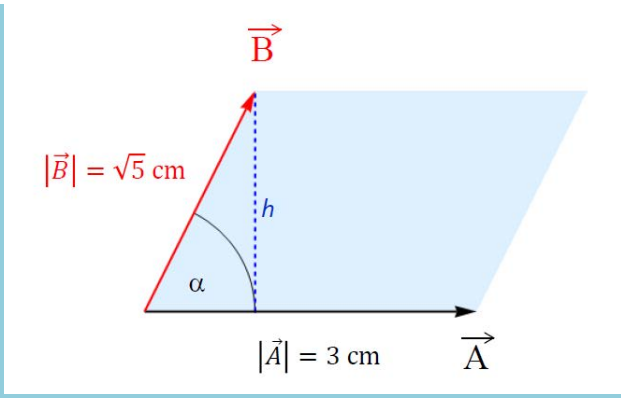
4.2.1 Módulo del producto vectorial

17. PREGUNTA:
Calcula el **módulo** del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ a partir de los datos que se muestran en la figura.



MATERIAL:
Módulo de producto vectorial (por definición):
$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \operatorname{sen} \alpha$, donde α es el ángulo que forman los dos vectores.

18. PREGUNTA:
Calcula el área del paralelogramo de la figura (el ángulo α es el mismo que en la pregunta anterior).



Responde: ¿Puedes establecer alguna relación entre este resultado y el de la pregunta anterior?

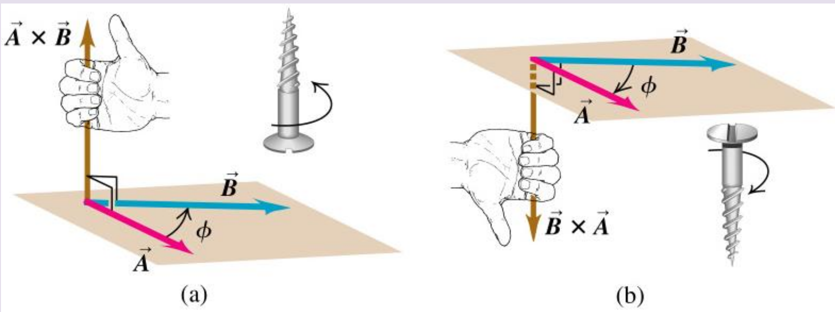
SUGERENCIAS:
a. Calcula primero la altura (h) del paralelogramo y recuerda cuál es el área de esta figura.

4.2.2 Vector resultante del producto vectorial

19. PREGUNTA:
Calcula los siguientes productos vectoriales de vectores unitarios: $\hat{\imath} \times \hat{\imath}$, $\hat{\imath} \times \hat{\jmath}$, $\hat{\imath} \times \hat{k}$.

SUGERENCIAS:
a. No olvides que, como su propio nombre indica, el producto vectorial da como resultado un **vector**. Deberás especificar por tanto sus componentes.
b. ¿Puede el producto vectorial de dos vectores no nulos ser nulo? ¿Para qué ángulos sucede eso?

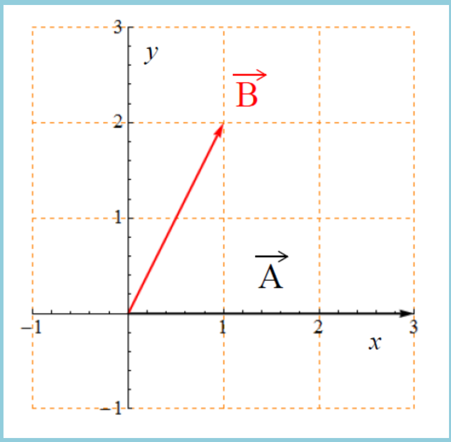
MATERIAL:
Dirección y sentido del producto vectorial (por definición):
El vector $\vec{A} \times \vec{B}$ debe ser perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$.
El sentido se puede determinar con ayuda de la regla de la mano derecha, tal y como se muestra en la figura adjunta, extraída del libro '*Física Universitaria*', de Sears, Zemansky, Young y Freedman. Observa que los dedos deben cerrarse en el sentido que va desde el primer vector al segundo por el camino más corto.



4.2.3 Producto vectorial a partir de componentes cartesianas

20. PREGUNTA:

Calcula el **vector** resultante del producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$ a partir de las componentes cartesianas de ambos vectores, que pueden extraerse fácilmente de la figura adjunta.



Extrae conclusiones comparando este resultado con el de preguntas anteriores.

MATERIAL:

Producto vectorial a partir de componentes cartesianas:

$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + (A_x B_y - A_y B_x)\hat{k}$